1. 집합 A 의 진부분집합의 개수가 3 개일 때, $n(A)$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

진부분집합은 자기 자신을 제외한 모든 부분집합이므로,
(진부분집합의 수)= (부분집합의 수)−1 이 된다.
따라서 집합 A 의 부분집합의 개수는 $3+1=4$ 개이며, $2^n = 4$ $\therefore n = 2$ 이다.

2. 다음 중 참인 명제는? (단, 문자는 모두 실수이다.)

① $a < b$이면 $a + c > b + c$

② $a < b$이면 $a - c > b - c$

③ $a < b$이고 $c > 0$이면 $ac > bc$

④ $a < b$이고 $c > 0$이면 $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

⑤ $ac < bc$이면 $a > b$

해설

실수의 대소 관계에는 다음과 같은 성질이 있다.

i) 임의의 두 실수 $a,\ b$ 에 대하여 $a > b,\ a = b,\ a < b$ 중에서 어느 하나만이 성립한다.
ii) $a > b,\ b > c$ 이면 $a > c$
iii) $a > b$ 이면 $a \pm c > b \pm c$
iv) $a > b,\ c > 0$ 이면 $ac > bc$
v) $a > b,\ c < 0$ 이면 $ac < bc$
따라서 참인 것은 ④이다.

3. 다음 중 역함수가 존재하지 않는 것은?

① $y = x - 2$ ② $y = x^2$
③ $y = x^3$ ④ $y = x^2 - 2x$ (단, $x \geq 1$)
⑤ $y = |x - 1|$ (단, $x \geq 1$)

해설
일대일 대응이 아닌 것은 ②번이다.
그러므로 ②번 그래프는 역함수가 존재하지 않는다.

4. 서로 다른 동전 두 개와 주사위 한 개를 던질 때, 나올 수 있는 모든 경우의 수는?

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 32 ⑤ 36

해설

동전을 한 번 던질 때 나올 수 있는 경우의 수는 2 가지, 주사위를 한번 던질 때 나올 수 있는 경우의 수는 6가지 이므로
$\Rightarrow 2 \times 2 \times 6 = 24$

5. 집합 $A = \{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$이라 할 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고른 것은?

㉠ $\varnothing \subset A$	㉡ $\{3,\ 5,\ 7\} \subset A$
㉢ $1 \in A$	㉣ $2 \in A$
㉤ $\{2\} \in A$	

① ㉠　② ㉢　③ ㉢, ㉤
④ ㉠, ㉢, ㉤　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

해설

㉢ $1 \notin A$
㉤ $\{2\} \subset A$

6. 집합 $A = \{x \mid x$는 8의 양의 약수$\}$ 의 부분집합 중에서 적어도 한 개의 짝수를 포함하는 집합의 개수는?

① 12개 ② 13개 ③ 14개 ④ 15개 ⑤ 16개

해설

$A = \{1, 2, 4, 8\}$ 이므로 집합 A 의 부분집합 중 적어도 한 개의 짝수를 포함하는 집합의 개수는 전체 부분집합의 개수에서 홀수로만 이루어진 집합 $\{1\}$ 의 부분집합의 개수를 빼면 된다.

$\therefore 2^4 - 2^1 = 14$(개)

7. 전체집합 $U = \{x \mid x\text{는 } 7 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ 에 대하여 집합 $(A^c \cup B^c) \cup B$ 의 모든 원소의 합은?

① 24 ② 25 ③ 26 ④ 27 ⑤ 28

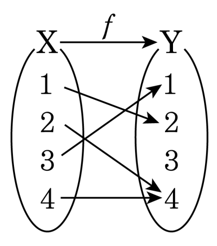
해설

$(A^c \cup B^c) \cup B = (A \cap B)^c \cup B = U$

따라서, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$ 이다.

8. 다음 그림과 같은 대응에 대한 다음 설명 중 옳은 것은 모두 몇 개인가?

> ㉠ 함수가 아니다.
> ㉡ 정의역은 1, 2, 3, 4이다.
> ㉢ 공역은 1, 2, 3, 4이다.
> ㉣ 치역은 1, 2, 3, 4이다.
> ㉤ 일대일대응이다.



① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠ 주어진 대응 x 의 각 원소에 y 가
1개씩 대응하므로 함수이다.
㉡, ㉢ 정의역과 공역은 모두 $1, 2, 3, 4$ 이다.
㉣ 치역은 1, 2, 4이다.
㉤ $f(2) = f(4) = 4$ 이고, $\mathrm{Y} \neq f(x)$ 이므로
일대일대응이 아니다.

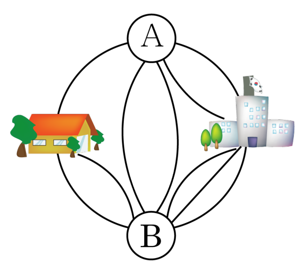
9. 함수 $y = \dfrac{bx+2}{ax-1}$ 의 정의역은 $x \neq 1$ 인 모든 실수이고 치역은 $y \neq 2$ 인 모든 실수이다. 이때, $a+b$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

정의역은 $x \neq 1$ 인 모든 실수이고 치역은 $y \neq 2$ 인 모든 실수이므로,
$a = 1,\ b = 2$ 이다.
$\therefore a+b = 1+2 = 3$

10. 집과 학교 사이에는 그림과 같이 길이 놓여 있을 때, 집에서 학교로 가는 방법의 수는? (단, 같은 지점을 두 번 지나지 않는다.)



① 22　② 34　③ 47　④ 54　⑤ 66

해설

(1) 집$\rightarrow A \rightarrow$ 학교 : $1 \times 2 = 2$

(2) 집$\rightarrow B \rightarrow$ 학교 : $2 \times 3 = 6$

(3) 집$\rightarrow A \rightarrow B \rightarrow$ 학교 : $1 \times 2 \times 3 = 6$

(4) 집$\rightarrow B \rightarrow A \rightarrow$ 학교 : $2 \times 2 \times 2 = 8$

$\therefore\ 2 + 6 + 6 + 8 = 22$

11. 다섯 개의 숫자 $1, 2, 3, 4, 5$ 에서 서로 다른 세 숫자를 택하여 세 자리의 자연수를 만들 때, 5 의 배수의 개수는?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

해설

다섯 개의 숫자 $1, 2, 3, 4, 5$ 에서 서로 다른 세 숫자를 택하여 만든 세 자리의 자연수가 5 의 배수이려면 일의 자리의 수가 5 이어야 한다.

따라서, $1, 2, 3, 4$ 에서 서로 다른 두 숫자를 택하여 백의 자리와 십의 자리에 배열하면 되므로 구하는 5 의 배수의 개수는 ${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$ (개)

12. 함수 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 에 대하여 $f^{101}(-1)$ 의 값은? (단, $f^n=f\circ f\circ\cdots\circ f$)

① 5　　② 4　　③ 3　　④ 2　　⑤ 1

해설

$f(-1)=\dfrac{1}{2},\ \ f^2(-1)=2,\ f^3(-1)=-1,\quad f^4(-1)=\dfrac{1}{2}\quad\cdots$

주기가 3 으로 반복되므로

$f^{101}=(f^3)^{33}\circ f^2=f^2=2$

13. IMPORT의 6개의 문자를 일렬로 배열할 때, I와 T가 양 끝에 오는 경우의 수는?

① 36　② 42　③ 48　④ 54　⑤ 60

해설

I와 T를 양 끝에 오게 하는 경우의 수 : 2
나머지 문자를 배열하는 경우의 수 : 4!
$4! \times 2 = 48$

14. a, b, c, d, e의 5개의 문자를 일렬로 나열할 때, c가 d보다 앞에 오게 되는 방법의 수는?

① 24 ② 30 ③ 60 ④ 72 ⑤ 120

해설

c와 d를 같은 문자로 생각하여 5개의 문자를 나열하는 방법과 같다.

$\therefore \dfrac{5!}{2!} = 60$

15. 두 자연수 $a,\ b$ 에 대하여 등식 ${}_{15}C_a = {}_{15}C_{6-b}$ 가 성립할 때, 순서쌍 $(a,\ b)$ 의 개수는?

① 12　② 11　③ 10　④ 9　⑤ 8

해설

${}_{n}C_r = {}_{n}C_{n-r}$ 이므로 ${}_{15}C_a = {}_{15}C_{6-b}$ 에서,
$a+6-b=15 \quad \therefore\ a-b=9$
또한 ${}_{15}C_a = {}_{15}C_{6-b}$ 에서 $a=6-b$ 이므로
$\therefore\ a+b=6$
따라서 두 자연수 $a,\ b$ 의 순서쌍의 개수는
$(10,\ 1),\ (11,\ 2),\ (12,\ 3),\ (13,\ 4),$
$(14,\ 5),\ (15,\ 6),\ (1,\ 5),\ (2,\ 4),$
$(3,\ 3),\ (4,\ 2),\ (5,\ 1)$ 의 11 개이다.

16. 5 명의 사람을 2 명, 2 명, 1 명씩 서로 색깔이 다른 3 개의 오리 보트에 나누어 타는 방법의 수는?

① 15가지　② 60가지　③ 90가지
④ 180가지　⑤ 540가지

해설

$${}_5C_2 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} \times 3! = 90$$

17. 전체집합 $U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A^c \cap B^c = \{1,\ 7\}$, $A^c \cap B = \{4, 6\}$ 일 때 집합 A 를 원소나열법으로 나타내면?

① $\{2,\ 3,\ 5\}$　② $\{2,\ 3,\ 5,\ 6\}$　③ $\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$
④ $\{2,\ 3,\ 6\}$　⑤ $\{2,\ 3,\ 7\}$

해설

$U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$,
$A^c \cap B^c = \{1,\ 7\} = (A \cup B)^c$ 에서 $A \cup B = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$
$A^c \cap B = \{4, 6\} = B \cap A^c = B - A$ 에서 B 에만 속하는 원소가 4, 6이므로
집합 A 의 원소는 2, 3, 5 이고 따라서 $A = \{2,\ 3,\ 5\}$ 이다.

18. 다음은 'x, y 가 자연수일 때, xy 가 짝수이면 x 또는 y 가 짝수이다.' 를 증명하는 과정이다.(가), (나), (다) 에 들어갈 말로 알맞게 짝지어진 것은?

주어진 명제의 대우는 '자연수 x, y 에 대하여 x 와 y 가 (가) 이면 xy 도 (가) 이다.' 이다. $x = 2a - 1$, $y = 2b - 1$ (a, b 는 자연수) 라 하면 $xy = (2a-1)(2b-1) = 2(2ab - a - b) + 1$ 이므로 xy 는 (나) 가 된다. 따라서, 대우가 (다) 이므로 주어진 명제도 (다) 이다.

① 짝수, 홀수, 참
② 짝수, 짝수, 참
③ 짝수, 짝수, 거짓
④ 홀수, 홀수, 참
⑤ 홀수, 홀수, 거짓

해설

주어진 명제의 대우는 '자연수 x, y 에 대하여 x 와 y 가 홀수이면 xy 도 홀수이다.' 이다.
$x = 2a - 1$, $y = 2b - 1$ (a, b 는 자연수) 라 하면
$xy = (2a-1)(2b-1) = 2(2ab - a - b) + 1$ 이므로 xy 는 홀수가 된다.
따라서, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

19. 함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$의 역함수가 $f^{-1}(x)=\dfrac{2x-4}{-x+3}$일 때, 함수 $y=|x+a|+b+c$의 최솟값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

f^{-1}의 역함수가 f이므로 $f(x)=(f^{-1})^{-1}(x)$

$y=f^{-1}(x)=\dfrac{2x-4}{-x+3}$를

x에 대하여 풀면, $x=\dfrac{3y+4}{y+2}$

x와 y를 바꾸면, $y=f(x)=\dfrac{3x+4}{x+2}$

$f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$이므로 $a=3,\ b=4,\ c=2$

함수 $y=|x+3|+6$은 $x=-3$일 때, 최솟값 6을 갖는다.

20. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{2, 4, 6, 8\}$에 대하여 치역과 공역이 일치하는 X에서 Y로의 함수의 개수는?

① 120개 ② 180개 ③ 240개

④ 300개 ⑤ 360개

해설

정의역의 원소 5개 중 2개는 같은 함숫값을 가진다.
집합 X의 원소 중 같은 함숫값을 갖는 2개를 택하는 방법의 수는
${}_5C_2 = 10$
택한 2개의 원소를 하나로 생각하여 집합 X의 원소 4개를 집합 Y의 각 원소에 대응시키는 방법의 수는 $4! = 24$
따라서 구하는 함수의 개수는 $10 \times 24 = 240$(개)