

1. 연립방정식 $\begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ 의 해를

$x = \alpha, y = \beta$ 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta$ 의 값은?

① 1

② 3

③ 5

④ 7

⑤ 9

해설

$$\begin{cases} y = x + 1 & \dots \textcircled{㉠} \\ x^2 + y^2 = 5 & \dots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$x^2 + (x + 1)^2 = 5, 2x^2 + 2x - 4 = 0,$$

$$2(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = 1, -2$$

$$x = 1 \text{ 일 때, } y = 2,$$

$$x = -2 \text{ 일 때, } y = -1$$

$$\therefore \alpha = 1, \beta = 2 \text{ 또는 } \alpha = -2, \beta = -1$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = 3$$

2. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y 에 대하여 $x + y$ 값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$

② 4

③ $-3\sqrt{2}$

④ -4

⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$$

$$(x - y)(x - 2y)$$

$$\Rightarrow (x - y)(x - 2y) = 0$$

$$\Rightarrow x = y \text{ 또는 } x = 2y$$

i) $x = y$

$$x^2 + 2y^2 = 3x^2 = 12$$

$$x = \pm 2 \Rightarrow y = \pm 2$$

ii) $x = 2y$

$$x^2 + 2y^2 = 6y^2 = 12$$

$$y = \pm \sqrt{2} \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$$

$$x + y = (4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$$

3. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases}$ 의 해를

$x = a, y = b$ 라 할 때, ab 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$x^2 + y^2 = 5 \quad \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

$$x^2 - xy + y^2 = 3 \quad \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

①을 ②에 대입하면 $5 - xy = 3, xy = 2$

$$\therefore ab = 2$$

4. 다음 중에서 성립하지 않는 것은?

① $a^2 \geq 0$

② $a^2 + b^2 \geq 0$

③ $a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$

④ $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

⑤ $a > b \Leftrightarrow ab > 0$

해설

① $a^2 \geq 0$ (항상 성립)

② $a^2 + b^2 \geq 0$ (항상 성립)

③ $a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ (항상 성립)

④ $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$ (항상 성립)

⑤ $a > b \Leftrightarrow ab > 0$

(반례: $a > 0$, $b < 0$ 이면 $a > b$ 이지만 $ab < 0$ 이다.)

5. 다음 부등식의 해가 없을 때, 상수 m 의 값의 합은?

$$m^2x - 1 > m(x - 1)$$

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$m^2x - 1 > m(x - 1)$ 에서

$$m^2x - 1 > mx - m$$

$$\therefore (m^2 - m)x > 1 - m \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

㉠의 해가 없어야 하므로

$$m^2 - m = 0, 1 - m \geq 0$$

$$m^2 - m = 0 \text{에서 } m(m - 1) = 0$$

$$\therefore m = 0 \text{ 또는 } 1 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

$$1 - m \geq 0 \text{에서 } m \leq 1 \cdots \textcircled{\text{㉢}}$$

따라서 ㉡, ㉢에서 $m = 0$ 또는 $m = 1$

6. 가로,의 길이가 세로의 길이보다 5 cm 더 긴 직사각형이 있다. 둘레의 길이가 34 cm 일 때, 이 직사각형의 가로,의 길이와 세로의 길이의 곱을 구하여라.(단, 단위 생략)

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x cm, y cm 라 하면



$$x = y + 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

또, 이 직사각형의 둘레는 $2(x + y)$ 이므로

$$2(x + y) = 34 \text{ 즉, } x + y = 17 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$y + 5 + y = 17, 2y = 12$$

$$\therefore y = 6$$

$$y = 6 \text{ 을 } \textcircled{㉠} \text{ 에 대입하면 } x = 11$$

$$\therefore xy = 11 \times 6 = 66$$

7. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - y^2 + 6y - 9 = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ 를 만족하는 실수 해의 순서쌍 (x, y) 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 1 개

해설

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 6y - 9 = 0 & \cdots \textcircled{A} \\ (x-y)^2 + y^2 = 2 & \cdots \textcircled{B} \end{cases}$$

$$\textcircled{A} \text{에서 } x^2 - (y-3)^2 = 0$$

$$(x+y-3)(x-y+3) = 0$$

$$y = x+3 \text{ 또는 } y = -x+3$$

i) $y = -x+3$ 을 $\textcircled{B}$ 에 대입하면,

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 이 때, } y = 1$$

ii) $y = x+3$ 을 $\textcircled{B}$ 에 대입하면,

$$x^2 + 2x + 4 = 0$$

$$\therefore x = -1 \pm \sqrt{3}i$$

$$\text{이 때, } y = 2 \pm \sqrt{3}i$$

i), ii)에서 실수해의 순서쌍은 $(2, 1)$ 이다.

따라서 실수해의 순서쌍의 개수는 1 개이다.

8. 다음 두 방정식이 공통근 α 를 갖는다. 이 때, $m + \alpha$ 의 값을 구하여라.

$$x^2 + (m + 2)x - 4 = 0, x^2 + (m + 4)x - 6 = 0$$

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

두 방정식의 공통근이 α 이므로

$$\alpha^2 + (m + 2)\alpha - 4 = 0 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\alpha^2 + (m + 4)\alpha - 6 = 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡} \text{ 에서 } -2\alpha + 2 = 0 \therefore \alpha = 1$$

$$\alpha = 1 \text{ 을 } \textcircled{㉠} \text{ 에 대입하면 } 1 + m + 2 - 4 = 0$$

$$\therefore m = 1$$

$$\therefore m + \alpha = 2$$

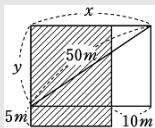
9. 대각선의 길이가 50m 인 직사각형 모양의 땅이 있다. 이 땅의 세로를 5m 늘리고, 가로를 10m 줄이면 넓이가 50m^2 만큼 늘어난다. 처음 직사각형의 가로의 길이를 구하여라. (단위는 생략할 것)

▶ 답 : m

▷ 정답 : 48m

해설

처음 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 $x\text{m}$, $y\text{m}$ 라 하면



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 50^2 \cdots \textcircled{㉠} \\ (x - 10)(y + 5) = xy + 50 \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

㉡을 정리하면 $5x - 10y = 100$

$$\therefore x = 2y + 20 \cdots \textcircled{㉢}$$

㉢을 ㉠에 대입하면

$$(2y + 20)^2 + y^2 = 50^2$$

$$y^2 + 16y - 420 = 0$$

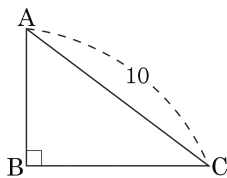
$$(y - 14)(y + 30) = 0$$

$$\therefore y = 14, -30$$

그런데 $0 < y < 50$ 이므로 $y = 14$

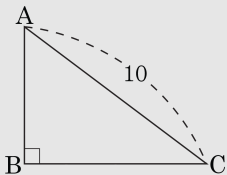
이것을 ㉢에 대입하면 $x = 48$

10. 다음 그림의 직각삼각형 ABC 에서 둘레의 길이가 24 이고, 빗변의 길이가 10 이다. 이때, 두 선분 AB 와 BC 의 길이의 곱을 구하면?



- ① 48 ② 40 ③ 32
④ 18 ⑤ 12

해설



$$\overline{AB} = a, \overline{BC} = b$$

둘레의 길이가 24 이므로

$$24 = a + b + 10$$

$$a + b = 14$$

직각삼각형이므로,

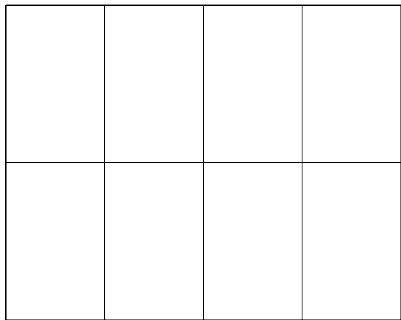
$$a^2 + b^2 = 10^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$ab = \frac{1}{2} \{ (a + b)^2 - (a^2 + b^2) \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ 14^2 - 10^2 \} = \frac{1}{2} \cdot 96 = 48$$

11. 학교운동장에 길이가 70m 인 줄을 가지고 다음 그림과 같은 직사각형 모양의 경계선을 표시하려고 한다. 이 때, 바깥 직사각형의 넓이가 80m^2 이 되도록 하는 바깥 직사각형의 가로와 세로의 길이의 합은? (단, 가로의 길이는 10m 이하이다.)



- ① 16m ② 17m ③ 18m ④ 19m ⑤ 20m

해설

운동장의 가로를 x , 세로를 y 라 하자.

$$3x + 5y = 70$$

$xy = 80$ 연립하여 풀면, $x = 10$, $y = 8$

$$\therefore \text{가로} + \text{세로} = 18$$

12. 두 이차방정식 $ax^2 + 4x + 2 = 0$, $x^2 + ax + 1 = 0$ 이 오직 하나의 공통근을 갖도록 하는 상수 a 의 값을 구하면?

① $-\frac{5}{3}$

② $-\frac{7}{2}$

③ $-\frac{5}{2}$

④ $-\frac{1}{2}$

⑤ $-\frac{5}{7}$

해설

공통근을 t 라 하면

$$at^2 + 4t + 2 = 0 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$t^2 + at + 1 = 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡} \times 2 : (a-2)t^2 + (4-2a)t = 0$$

$$(a-2)t(t-2) = 0$$

이때, $a = 2$ 이면 두 방정식은 서로 같으므로 $a \neq 2$

그런데 $t = 0$ 이면 $\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 의 해가 존재하지 않으므로 $t = 2$

따라서 $\textcircled{㉡}$ 에서 $2a + 5 = 0$

$$\therefore a = -\frac{5}{2}$$

13. 방정식 $2x^2 - 4xy + 4y^2 - 8x + 16 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 x 와 y 의 곱은?

① -2

② 3

③ 4

④ 8

⑤ 10

해설

$2x^2 - 4xy + 4y^2 - 8x + 16 = 0$ 에서

$$(x^2 - 4xy + 4y^2) + (x^2 - 8x + 16) = 0,$$

$$(x - 2y)^2 + (x - 4)^2 = 0$$

$$x = 2y, x = 4$$

$$\therefore x = 4, y = 2 \quad \therefore xy = 8$$

14. 다음 방정식을 만족하는 실수 x, y 의 합을 구하여라.

$$(x^2 + 1)(y^2 + 4) = 8xy$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

▷ 정답 : 3

해설

$(x^2 + 1)(y^2 + 4) = 8xy$ 에서 $x^2y^2 + 4x^2 + y^2 + 4 - 8xy = 0$
이것을 완전제곱식의 꼴로 변형하면

$$(x^2y^2 - 4xy + 4) + (4x^2 - 4xy + y^2) = 0$$

이 때, x, y 가 실수이므로 $xy - 2, 2x - y$ 도 실수이다.

$$\therefore xy - 2 = 0 \quad \cdots \textcircled{7},$$

$$2x - y = 0 \quad \cdots \textcircled{8}$$

⑧에서 $y = 2x$ 이고, 이것을 ⑦에 대입하면 $x^2 = 1$

따라서, $x = 1$ 일 때 $y = 2$, $x = -1$ 일 때 $y = -2$

그러므로 x, y 의 값은 $x = \pm 1, y = \pm 2$ (복부호 동순)

따라서 x, y 의 합은 $-3, 3$

15. 방정식 $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 0$ 을 만족하는 두 실수 x, y 의 합 $x + y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4x + 4 = 0 \text{ 에서}$$

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$$

$$x, y \text{ 는 실수이므로 } x = -1, y = 2$$

$$\therefore x + y = -1 + 2 = 1$$

16. 방정식 $2x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4 = 0$ 을 만족시키는 실수 x, y 의 곱 xy 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$$2x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4 = 0 \text{ 에서}$$

$$(x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 4x + 4) = 0$$

$$(x + y)^2 + (x - 2)^2 = 0$$

$$x, y \text{가 실수이므로 } x + y = 0, x - 2 = 0$$

$$\therefore x = 2, y = -2$$

$$\therefore xy = -4$$

17. 이차방정식 $2x^2 - 5x + k = 0$ 의 근이 유리수가 되는 k 의 최대 정수값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

근이 유리수이므로, 판별식 $D \geq 0$ 이어야 한다.

$D = 25 - 8k \geq 0$ 곧, $k \leq \frac{25}{8}$ 이어야 한다.

k 는 정수이므로 $k = 3, 2, 1, \dots$ 이고,
이 중 $D \geq 0$ 조건을 만족하는 최대 정수는 $k = 3$ 이다.

18. 다음 그림의 격자점 중 $xy + x - 2y - 2 = 3$ 을 만족시키는 점은 모두 몇 개인가?

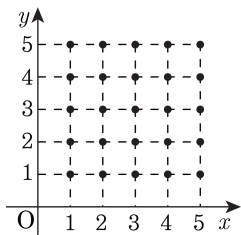
① 0 개

② 1 개

③ 2 개

④ 3 개

⑤ 4 개



해설

$$\begin{aligned} xy + x - 2y - 2 &= x(y + 1) - 2(y + 1) \\ &= (x - 2)(y + 1) \text{ 이므로} \end{aligned}$$

$(x - 2)(y + 1) = 3$ 에서 문제의 x, y 는

i) $x - 2 = 1, y + 1 = 3$ 일 때, $x = 3, y = 2$

ii) $x - 2 = 3, y + 1 = 1$ 일 때, $x = 5, y = 0$

iii) $x - 2 = -1, y + 1 = -3$ 일 때, $x = 1, y = -4$

iv) $x - 2 = -3, y + 1 = -1$ 일 때,

$$x = -1, y = -2$$

x, y 는 자연수이므로 조건을 만족시키는 점은 $(3, 2)$ 뿐이다.

19. 연립방정식 $\begin{cases} xy + x + y = 5 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases}$ 을 만족하는 순서쌍 (x, y) 의 개수는?

- ① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$x + y = u$, $xy = v$ 라 하면

$$\begin{cases} u + v = 5 & \cdots \textcircled{A} \\ u^2 - v = 7 & \cdots \textcircled{B} \end{cases}$$

①을 ②에 대입하면

$$u^2 - (5 - u) = 7$$

$$u^2 + u - 12 = 0$$

$$(u + 4)(u - 3) = 0$$

$$\therefore u = -4 \text{ 또는 } u = 3$$

(i) $u = -4$, $v = 9$, 즉 $x + y = -4$, $xy = 9$ 일 때, x, y 는 $t^2 + 4t + 9 = 0$ 의 두 근이므로 $t = -2 \pm \sqrt{5}i$

따라서, $x = -2 \pm \sqrt{5}i$, $y = -2 \mp \sqrt{5}i$ 이므로 (복부호 동순)
 $(-2 + \sqrt{5}i, -2 - \sqrt{5}i)$, $(-2 - \sqrt{5}i, -2 + \sqrt{5}i)$

(ii) $u = 3$, $v = 2$, 즉 $x + y = 3$, $xy = 2$ 일때, x, y 는 $t^2 - 3t + 2 = 0$ 의 두 근이므로

$$(t - 1)(t - 2) = 0$$

$$\therefore t = 1 \text{ 또는 } t = 2$$

따라서, $x = 1$, $y = 2$ 또는 $x = 2$, $y = 1$ 이므로
 $(1, 2)$, $(2, 1)$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는 4개이다

20. p 가 실수일 때, 두 이차방정식 $x^2 + px + 3 = 0$, $x^2 + 3x + p = 0$ 이 오직 한 개의 공통근 α 를 갖는다고 한다. 이 때, $\alpha - p$ 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\alpha^2 + p\alpha + 3 = 0$$

$$\alpha^2 + 3\alpha + p = 0$$

$$\alpha(p - 3) - (p - 3) = (\alpha - 1)(p - 3) = 0$$

$$\alpha = 1 \text{ or } p = 3$$

$p = 3$ 이면 두 다항식이 같아지므로 $\alpha = 1$

$$\therefore 1 + p + 3 = 0 \quad \therefore p = -4$$

$$\therefore \alpha - p = 1 - (-4) = 5$$

21. 직육면체의 한 꼭짓점 A에 모인 세면의 넓이의 비가 2 : 3 : 4 일 때, 꼭짓점 A에 모인 세 모서리의 길이의 비를 구하면?

① 2 : 3 : 4

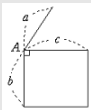
② 4 : 3 : 7

③ 3 : 1 : 4

④ 4 : 3 : 6

⑤ 4 : 5 : 6

해설



꼭지점 A의 각면은 넓이비가 2 : 3 : 4 이므로,

$$\begin{cases} ab = 2k^2 \dots ① \\ bc = 3k^2 \dots ② \\ ca = 4k^2 \dots ③ \end{cases}$$

(k는 양의 상수)

$$ab \times bc \times ca = 2k^2 \cdot 3k^2 \cdot 4k^2, (abc)^2 = 24k^6$$

$$\therefore abc = 2\sqrt{6}k^3 \dots ④$$

$$④ \div ② \text{ 하면 } a = \frac{2}{3}\sqrt{6}k$$

$$④ \div ③ \text{ 하면 } b = \frac{\sqrt{6}}{2}k$$

$$④ \div ① \text{ 하면 } c = \sqrt{6}k$$

$$\therefore a : b : c = \frac{2}{3} : \frac{1}{2} : 1 = 4 : 3 : 6$$