1. $f(x)=x^3-3x^2+3x+1$일 때, $f(x)-2=x(x^2-1)+a(x-x^2)+b(x^2-1)$가 항상 성립하도록 하는 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$f(x)-2=x^3-3x^2+3x-1$이므로

$x^3-3x^2+3x-1=x(x^2-1)+a(x-x^2)+b(x^2-1)$

$=x^3+(-a+b)x^2+(a-1)x-b\cdots$㉠

㉠이 x에 대한 항등식이므로 양변의 차수가 같은 항의 계수가 같아야 한다.

즉, $-a+b=-3,\ a-1=3,\ b=1$

이므로 $a=4,\ b=1$

$\therefore\ a+b=5$

2. $2x^2-3x-2=a(x-1)(x+2)+bx(x+2)+cx(x-1)$이 x에 대한 항등식이 되도록 $a,\ b,\ c$의 값을 정하면?

① $a=1,\ b=-1,\ c=2$

② $a=-1,\ b=1,\ c=-2$

③ $a=1,\ b=1,\ c=2$

④ $a=-1,\ b=-1,\ c=-2$

⑤ $a=1,\ b=-1,\ c=-2$

해설

수치대입법을 이용한다.

$x=0$을 대입 $-2=-2a \quad \therefore\ a=1$

$x=1$을 대입 $-3=3b \quad \therefore\ b=-1$

$x=-2$를 대입 $12=6c \quad \therefore\ c=2$

3. 임의의 x 에 대하여 $x^3-1=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$ 를 만족하는 상수 $a,\ b,\ c,\ d$ 의 합 $a+b+c+d$ 의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

양변에 $x=0$ 을 대입 하면

$-1=a+b+c+d$

$\therefore\ a+b+c+d=-1$

해설

$x^3-1=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$

$=(x+1)\{a(x+1)^2+b(x+1)+c\}+d$

$=(x+1)[(x+1)\{a(x+1)+b\}+c]+d$ 이므로

x^3-1 을 $x+1$ 로 연속으로 나눌 때

차례대로 나오는 나머지가 $d,\ c,\ b$가 되고 마지막 몫이 a 이다.

-1	1	0	0	-1	
		-1	1	-1	
-1	1	-1	1	$\boxed{-2}$	$\leftarrow$ d
		-1	2		
-1	1	-2	$\boxed{3}$ $\leftarrow$	c	
		-1			
	1	$\boxed{-3}$	$\leftarrow$ b		
	$\uparrow$				
	a				

4. 다음 등식이 x 에 대한 항등식일 때, $a-b+c$ 의 값은?

$$x^2-2x+4=a(x-1)(x-2)+bx(x-2)+cx(x-1)$$

① 8　　② 7　　③ 3　　④ 0　　⑤ -3

해설

주어진 등식이 x 에 대한 항등식이므로 x 에 어떤 값을 대입하여도 성립한다.

$x=0$을 대입하면

$4=2a \quad \therefore \ a=2$

$x=1$을 대입하면

$3=-b \quad \therefore \ b=-3$

$x=2$을 대입하면

$4=2c \quad \therefore \ c=2$

$\therefore \ a-b+c=2-(-3)+2=7$

5. $(x+y)a-(x-y)b-(y-z)c-4z=0$이 $x,\ y,\ z$의 값에 관계없이 항상 성립할 때, 곱 abc를 구하면?

① 4 ② 8 ③ 16 ④ 32 ⑤ 64

해설

x, y, z에 대해 정리하면

$(a-b)x+(a+b-c)y+(c-4)z=0$

$x,\ y,\ z$에 대한 항등식이므로

$a=b,\ a+b-c=0,\ c=4$

$\therefore\ a=b=2,\ c=4$

$\therefore\ abc=16$

6. a, b는 정수이고, ax^3+bx^2+1이 x^2-x-1로 나누어 떨어질 때, b의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

전개했을 때 양변의 최고차항과 상수항이 같아야 하므로

ax^3+bx^2+1

$=(x^2-x-1)(ax-1)$

$=ax^3-(1+a)x^2+(1-a)x+1$

양변의 계수를 비교하면

$-(1+a)=b, 1-a=0$

$\therefore \quad a=1,\ b=-2$

7. x에 대한 다항식 $(4x^2-3x+1)^5$을 전개하였을 때, 모든 계수들(상수항 포함)의 합은?

① 0 ② 16 ③ 32 ④ 64 ⑤ 1024

해설

$(4x^2-3x+1)^5$을 전개하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면
$(4x^2-3x+1)^5 = a_0x^{10}+a_1x^9+a_2x^8+\cdots+a_9x+a_{10}$과 같이
된다.
여기서 모든 계수들의 합
$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$을 구하려면
$x=1$을 대입하면 된다.
즉, $(4-3+1)^5 = a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$
모든 계수들의 합은 $2^5=32$

8. $\dfrac{2x+3a}{4x+2}$가 x에 관계없이 일정한 값을 가질 때, a의 값을 구하면?
$\left(\text{단, } x \neq -\dfrac{1}{2}\right)$

① 1 ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{1}{3}$ ④ $\dfrac{1}{4}$ ⑤ $\dfrac{1}{5}$

해설

$\dfrac{2x+3a}{4x+2} = k$ (일정)라 놓으면

$2x+3a = k(4x+2)$ 에서 $(2-4k)x + (3a-2k) = 0$

이 식은 x에 대한 항등식이므로

$2-4k=0$, $3a-2k=0$

$\therefore\ k = \dfrac{1}{2}$ 이므로 $a = \dfrac{1}{3}$

9. k의 값에 관계없이 $(2k^2-3k)x-(k+2)y-(k^2-4)z=28$이 항상 성립하도록 x, y, z의 값을 정할 때, $3x+y+z$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

주어진 식을 k에 대해 정리하면

$(2x-z)k^2-(3x+y)k-(2y-4z+28)=0$

$\therefore\ 2x-z=0, 3x+y=0, 2y-4z+28=0$

$z=2x,\ y=-3x$을 $2y-4z+28=0$에 대입하면

$x=2,\ y=-6,\ z=4$

$\therefore\ 3x+y+z=4$

10. k의 값에 관계없이 $(3k^2+2k)x-(k+1)y-(k^2-1)z$의 값이 항상 1일 때, $x+y+z$의 값은?

① -3 ② 0 ③ 3 ④ 6 ⑤ 8

해설

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$k^2(3x-z)+k(2x-y)-(y-z)=1$

위 식이 k의 값에 관계없이 성립하므로 k에 대한 항등식이다.

$$\begin{cases} 3x-z=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-y=0 & \cdots\cdots ㉡ \\ z-y=1 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$x=1,\ y=2,\ z=3$

$\therefore\ x+y+z=6$

11. $x-y=1$을 만족하는 임의의 실수 x, y에 대하여 $ax^2+bxy+cy^2-1=0$이 항상 성립할 때, $a+b+c$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$y=x-1$을 준식에 대입하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$(a+b+c)x^2-(b+2c)x+c-1=0$

x에 대한 항등식이므로

$a+b+c=0,\ b+2c=0,\ c-1=0$

$\therefore\ a=1,\ b=-2,\ c=1$

$\therefore\ a+b+c=0$

12. 세 실수 a, b, c에 대하여 $(a, b, c) = ab + bc$로 정의한다. 이때, 등식 $(x, a, y) - (2x, b, y) = (x, 2, y)$이 임의의 실수 x, y에 대하여 성립하도록 a, b의 값을 정하면?

① $a = 1,\ b = 2$ ② $a = 2,\ b = 2$ ③ $a = 2,\ b = 0$

④ $a = 0,\ b = 2$ ⑤ $a = 0,\ b = 0$

해설

기호의 정의에 따라서 주어진 식을 다시 쓰면

$(ax + ay) - (2bx + by) = 2x + 2y$

이 식을 x, y에 대하여 정리하면

$(a - 2b - 2)x + (a - b - 2)y = 0$

이 등식이 임의의 x, y에 대하여 성립하므로

$a - 2b - 2 = 0,\ a - b - 2 = 0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = 2,\ b = 0$

13. 등식 $x^3+ax^2+2x+b=(x^2+x+1)Q(x)+2x+1$이 x에 대한 항등식일 때, $a+b$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$Q(x)=x+c$라고 두고 전개하여 계수를 비교하면

$a=0,\ b=0,\ c=-1$이므로 $a+b=0$

해설

x^3+ax^2+2x+b를 x^2+x+1로 직접 나눗셈을 하면,

$$
\begin{array}{r l}
 & x+(a-1) \\
x^2+x+1 \,\big) & x^3+ax^2+2x+b \\
- & x^3+x^2+x \\
\hline
 & (a-1)x^2+x+b \\
- & (a-1)x^2+(a-1)x+(a-1) \\
\hline
 & (2-a)x+b-a+1
\end{array}
$$

$2-a=2,\ b-a+1=1$

$a=0,\ b=0$

14. 등식 $2x^2+x+5=a(x-1)^2+b(x-1)+c$가 x에 대한 항등식일 때 $a+b+c$의 값은?

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

해설

좌변을 전개하여 계수를 비교해서 a, b, c를 구할 수 있다.
여기에서는 계수의 합을 구하는 것이므로 양변에 $x=2$를 대입해서 구한다.

$15=a+b+c$

15. 2가 아닌 모든 실수 x에 대하여 $\dfrac{ax^2+4x+b}{x-2}$의 값이 항상 일정하도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a-b$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$\dfrac{ax^2+4x+b}{x-2}=k$라 하면

$ax^2+4x+b=k(x-2)$

$ax^2+(4-k)x+b+2k=0$

x에 대한 항등식이므로

$a=0$

$4-k=0$에서 $k=4$

$b+2k=0$에서 $b=-8$

$\therefore\ a-b=8$

해설

주어진 식이 모든 x에 대해 일정한 값을 가지려면

분자인 ax^2+4x+b가 분모인 '$x-2$' 만을 인수로 가져야 한다.

즉, 분자가 $k(x-2)$가 되어야 한다.

$\dfrac{ax^2+4x+b}{x-2}=\dfrac{4(x-2)}{x-2}=4$

$\therefore a=0,\ b=-8$에서 $a-b=8$

16. 삼차항의 계수가 1 인 삼차식 $f(x)$ 에 대하여 $f(1)=f(2)=f(3)=3$ 이 성립할 때, $f(0)$ 의 값은?

① -6 ② -4 ③ -3 ④ 1 ⑤ 3

해설

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 라고 두면,

$f(1)=1+a+b+c=3$

$f(2)=8+4a+2b+c=3$

$f(3)=27+9a+3b+c=3$

세 식을 연립하여 풀면

$a=-6,\ b=11,\ c=-3$

$f(x)=x^3-6x^2+11x-3$

$\therefore\ f(0)=-3$

해설

$f(1)=f(2)=f(3)=3$ 이므로

$f(x)-3=(x-1)(x-2)(x-3)$

$f(0)-3=-1\times(-2)\times(-3)=-6$

$\therefore f(0)=-3$

17. x에 대한 항등식 $(x^2-x-1)^3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_6x^6$에서 $a_1 + a_3 + a_5$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

양변에 $x=1$을 대입하면,

$-1 = a_0 + a_1 + \cdots + a_6 \quad \cdots$ ㉠

양변에 $x=-1$을 대입하면,

$1 = a_0 - a_1 + \cdots + a_6 \quad \cdots$ ㉡

㉠ − ㉡: $-2 = 2(a_1 + a_3 + a_5)$

$\therefore\ a_1 + a_3 + a_5 = -1$

18. $(1-x-x^2)^{25} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{49}x^{49} + a_{50}x^{50}$ 이라 할 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50}$ 의 값은?

① 0　② 1　③ 2^{24}　④ 2^{25}　⑤ 2^{50}

해설

$(1-x-x^2)^{25} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{50}x^{50}$

$x=1$을 양변에 대입하면

$-1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{50} \cdots ①$

$x=-1$을 양변에 대입하면

$1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{49} + a_{50} \cdots ②$

① + ②: $2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50}) = 0$

$a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{50} = 0$

19. n이 자연수일 때, $x^{2n}(x^2+ax+b)$를 $(x+2)^2$으로 나눈 나머지가 $4^n(x+2)$가 되도록 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

(i) $f(x)=x^{2n}(x^2+ax+b)$
$=(x+2)^2Q(x)+4^n(x+2)$

$f(-2)=4^n(4-2a+b)=0$

$\therefore\ b=2a-4$

(ii) $f(x)=x^{2n}(x^2+ax+2a-4)$
$=x^{2n}(x+2)(x+a-2)$
$=(x+2)^2Q(x)+4^n(x+2)$

$\therefore x^{2n}(x+a-2)=(x+2)Q(x)+4^n$

$x=-2$ 를 대입하면

$4^n(-4+a)=4^n$, $-4+a=1$

$\therefore\ a=5$

$b=2a-4$ 에서 $b=6$

$\therefore\ a+b=11$

20. 임의의 실수 x에 대하여 $x^{11}+x=a_0+a_1(x+3)+a_2(x+3)^2+\cdots+a_{11}(x+3)^{11}$이 성립할 때, $a_1+a_3+\cdots+a_{11}$의 값은?

① $2^{22}-2^{11}+2$　② $2^{22}+2^{11}-2$　③ $2^{21}-2^{10}+1$

④ $2^{21}+2^{10}-1$　⑤ $2^{21}+2^{10}+1$

해설

주어진 식의 양변에 $x=-2,\ x=-4$를 각각 대입하면

$-2^{11}-2=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{11}\cdots$ ㉠

$-2^{22}-4=a_0-a_1+a_2+\cdots-a_{11}\cdots$ ㉡

㉠ − ㉡에서 $2(a_1+a_3+\cdots+a_{11})=2^{22}-2^{11}+2$

$\therefore\ a_1+a_3+\cdots+a_{11}=2^{21}-2^{10}+1$