

1. $y = x - [x] (0 \leq x \leq 4)$ 의 그래프를 그릴 때, 그래프의 길이를 구하면?
([x]는 x 보다 크지 않은 최대 정수)

① 2

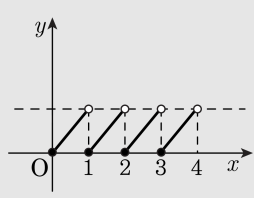
② $2\sqrt{2}$

③ 4

④ $4\sqrt{2}$

⑤ 8

해설



$y = x - [x]$ 에서

i) $0 \leq x < 1$ 인 경우 $y = x - 0$

ii) $1 \leq x < 2$, $y = x - 1$

iii) $2 \leq x < 3$, $y = x - 2$

iv) $3 \leq x < 4$, $y = x - 3$

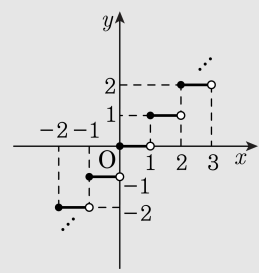
i), ii), iii), iv)를 그래프로 그리면 다음과 같다. 그러므로 각각의 길이는 $\sqrt{2}$ 이 일정하므로

$4\sqrt{2}$ 가 된다.

2. 다음 중 옳지 않은 것을 고르면? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수)
- ① $y = [x]$ 의 그래프는 함수의 그래프이다.
 - ② $y = [x]$ 의 정의역이 모든 실수일 때, 치역은 정수 전체의 집합이다.
 - ③ $x = 2.1$ 이면 $[x] = 2$ 이다.
 - ④ $x = -1.8$ 이면 $[x] = -2$ 이다.
 - ⑤ $y = [x]$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

해설

$y = [x]$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로



$y = [x]$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이 아니다.

3. 두 함수 $y = |x - 1|$, $y = \left[\frac{x}{2}\right]$ 의 그래프의 교점의 개수를 구하면?
(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

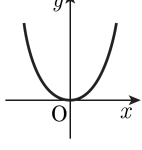
$y = |x - 1|$ 과 $y = \left[\frac{x}{2}\right]$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

A Cartesian coordinate system showing the graphs of $y = |x - 1|$ and $y = \left[\frac{x}{2}\right]$. The x-axis is labeled from -2 to 6, and the y-axis is labeled from -1 to 2. The graph of $y = |x - 1|$ is a V-shape with its vertex at (1, 0). The graph of $y = \left[\frac{x}{2}\right]$ is a piecewise linear function that increases in steps. The two graphs intersect at two points: (1, 0) and (4, 2). The intersection at (4, 2) is specifically marked with a solid dot on the step function and an open circle on the absolute value function.

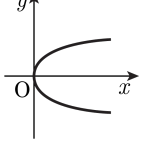
따라서, $y = |x - 1|$ 과 $y = \left[\frac{x}{2}\right]$ 의 그래프의 교점의 개수는 2 개이다.

4. 다음 중 역함수가 존재하는 함수의 그래프로서 적당한 것은 무엇인가?

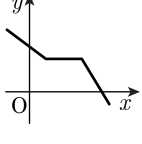
①



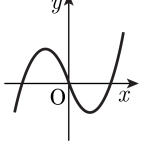
②



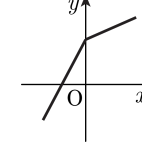
③



④



⑤



해설

주어진 그래프 중 일대일 대응인 것을 찾으면 ⑤이다.

5. 다음 보기는 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x)$ 를 나타낸 것이다. 역함수가 존재하는 것을 모두 고르면 무엇인가?

$$\textcircled{\text{㉠}} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ x & (x < 0) \end{cases}$$

$$\textcircled{\text{㉡}} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (x \geq 1) \\ 1 - x & (x < 1) \end{cases}$$

$$\textcircled{\text{㉢}} \quad f(x) = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ x + 3 & (x < 0) \end{cases}$$

- ① ㉠

② ㉡

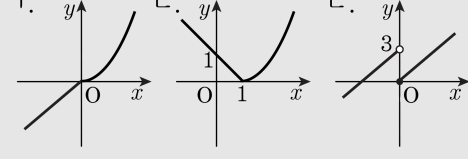
③ ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

함수 $f(x)$ 가 일대일대응일 때
 역함수가 존재한다.
 이 때, 보기의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서, 함수 ㉠이 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

6. 두 집합 $X = \{x \mid 1 \leq x \leq 5\}$, $Y = \{y \mid 1 \leq y \leq 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로
의 함수 $f(x) = ax + b$ 의 역함수가 존재할 때, 상수 a, b 에 대하여
 $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, $a > 0$)

- ① $\frac{1}{4}$
- ② $\frac{1}{3}$
- ③ $\frac{1}{2}$
- ④ 1
- ⑤ 2

해설

역함수가 존재하므로 함수 f 는 일대일대응이다.

함수 $f(x)$ 의 기울기가 양수이므로

$f(1) = 1, f(5) = 3$

$f(1) = 1$ 에서 $a + b = 1 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$

$f(5) = 3$ 에서 $5a + b = 3 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$

$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$ 을 연립하여 풀면 $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$

$\therefore a^2 + b^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

7. $x \neq 1$ 인 모든 실수에 대하여 $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ 로 정의된 함수 f 에 대하여
역함수 $f^{-1}(x)$ 가 $f^{-1}(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$f(x) = y = \frac{2x+1}{x-1} \text{의 역함수는}$$
$$x = \frac{2y+1}{y-1} \text{에서}$$
$$x(y-1) = 2y+1, xy-x = 2y+1, xy-2y = x+1$$
$$(x-2)y = x+1$$
$$\therefore y = \frac{x+1}{x-2} = f^{-1}(x)$$
$$= \frac{ax+b}{x+c}$$
$$\therefore a=1, b=1, c=-2$$
$$\therefore a+b+c=0$$

8. 실수 전체의 집합에서 $f : x \rightarrow ax(a \neq 1), g : x \rightarrow x + b$ 로 정의된 함수 f, g 에 대하여 $(f \circ g)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ 가 성립할 때, ab 의 값은?

- ① -2
- ② -1
- ③ 0
- ④ 1
- ⑤ 2

해설

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = ax + ab$

$(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - b \cdots \textcircled{\tiny \text{㉠}}$

$f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x, g^{-1}(x) = x - b$

$(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = \frac{1}{a}(x - b)$
 $= \frac{1}{a}x - \frac{b}{a} \cdots \textcircled{\tiny \text{㉡}}$

$\textcircled{\tiny \text{㉠}}, \textcircled{\tiny \text{㉡}}$ 에서 $b = \frac{b}{a}(a \neq 1)$ 이므로 $b = 0$

$\therefore ab = 0$

9. 다음 함수의 역함수를 구하면?

$$y = x^2 - 3 \text{ (단, } x \geq 0 \text{)}$$

① $y = \sqrt{x+1}$ (단, $x \geq -1$)

② $y = \sqrt{x+2}$ (단, $x \geq -2$)

③ $y = \sqrt{x+3}$ (단, $x \geq -3$)

④ $y = \sqrt{x+4}$ (단, $x \geq -4$)

⑤ $y = \sqrt{x+5}$ (단, $x \geq -5$)

해설

$x \geq 0$ 이면 $y = x^2 - 3 \geq -3$ 이므로 주어진 함수의 치역은 $\{y \mid y \geq -3\}$
한편, $y = x^2 - 3$ 을 x 에 대하여 풀면
 $x^2 = y + 3$ 에서 $x = \pm \sqrt{y+3}$
이 때, $x \geq 0$ 이어야 하므로
 $x = \sqrt{y+3}$ (단, $y \geq -3$)
여기서, x, y 를 서로 바꾸면
구하는 역함수는 $y = \sqrt{x+3}$ (단, $x \geq -3$)