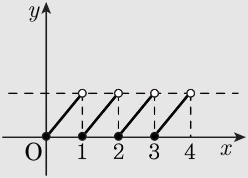
1. $y = x - [x](0 \le x \le 4)$ 의 그래프를 그릴 때, 그래프의 길이를 구하면? ($[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수)

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ 4 ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ 8

해설



$y = x - [x]$ 에서

i) $0 \le x < 1$ 인 경우 $y = x - 0$

ii) $1 \le x < 2$, $y = x - 1$

iii) $2 \le x < 3$, $y = x - 2$

iv) $3 \le x \le 4$, $y = x - 3$

i), ii), iii), iv)를 그래프로 그리면 다음과 같다. 그러므로 각각의 길이는 $\sqrt{2}$ 이 일정하므로

$4\sqrt{2}$ 가 된다.

2. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것을 고르면? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수)

① $y = [x]$ 의 그래프는 함수의 그래프이다.

② $y = [x]$ 의 정의역이 모든 실수일 때, 치역은 정수 전체의 집합이다.

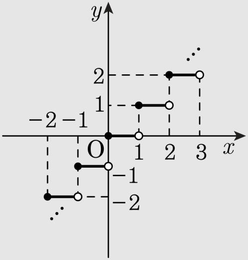
③ $x = 2.1$ 이면 $[x] = 2$ 이다.

④ $x = -1.8$ 이면 $[x] = -2$ 이다.

⑤ $y = [x]$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

해설

$y = [x]$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로



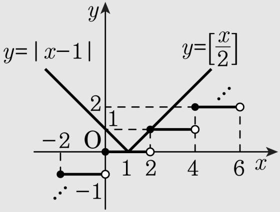
$y = [x]$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이 아니다.

3. 두 함수 $y = |x-1|$, $y = \left[\frac{x}{2}\right]$ 의 그래프의 교점의 개수를 구하면? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

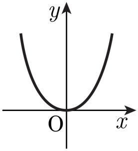
$y = |x-1|$ 과 $y = \left[\frac{x}{2}\right]$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



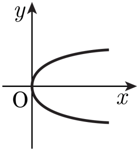
따라서, $y = |x-1|$ 과 $y = \left[\frac{x}{2}\right]$ 의 그래프의 교점의 개수는 2 개이다.

4. 다음 중 역함수가 존재하는 함수의 그래프로서 적당한 것은 무엇인가?

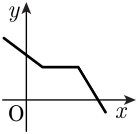
①



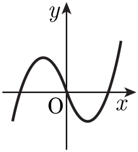
②



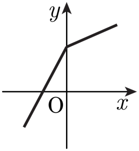
③



④



⑤



해설

주어진 그래프 중 일대일대응인 것을 찾으면 ⑤이다.

5. 다음 보기는 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x)$ 를 나타낸 것이다. 역함수가 존재하는 것을 모두 고르면 무엇인가?

ㄱ $f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \ge 0) \\ x & (x < 0) \end{cases}$

ㄴ $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (x \ge 1) \\ 1 - x & (x < 1) \end{cases}$

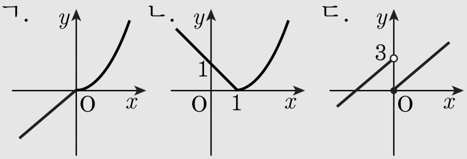
ㄷ $f(x) = \begin{cases} x & (x \ge 0) \\ x + 3 & (x < 0) \end{cases}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

함수 $f(x)$가 일대일대응일 때
역함수가 존재한다.
이 때, 보기의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서, 함수 ㄱ이 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

6. 두 집합 $X = \{x \mid 1 \le x \le 5\}$, $Y = \{y \mid 1 \le y \le 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 $f(x) = ax + b$ 의 역함수가 존재할 때, 상수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, $a > 0$)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

해설

역함수가 존재하므로 함수 f 는 일대일대응이다.

함수 $f(x)$ 의 기울기가 양수이므로

$f(1) = 1$, $f(5) = 3$

$f(1) = 1$ 에서 $a + b = 1 \cdots$ ㉠

$f(5) = 3$ 에서 $5a + b = 3 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$

$$\therefore a^2 + b^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

7. $x \neq 1$인 모든 실수에 대하여 $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$로 정의된 함수 f에 대하여 역함수 $f^{-1}(x)$가 $f^{-1}(x) = \dfrac{ax+b}{x+c}$일 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x) = y = \dfrac{2x+1}{x-1}$의 역함수는

$x = \dfrac{2y+1}{y-1}$에서

$x(y-1) = 2y+1,\ xy - x = 2y+1,\ xy - 2y = x+1$

$(x-2)y = x+1$

$$\therefore\ y = \frac{x+1}{x-2} = f^{-1}(x)$$

$$= \frac{ax+b}{x+c}$$

즉, $a = 1,\ b = 1,\ c = -2$

$\therefore\ a+b+c = 0$

8. 실수 전체의 집합에서 $f : x \to ax(a \neq 1)$, $g : x \to x + b$ 로 정의된 함수 f, g 에 대하여 $(f \circ g)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ 가 성립할 때, ab 의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = ax + ab$$

$$(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - b \cdots ㉠$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x,\ \ g^{-1}(x) = x - b$$

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = \frac{1}{a}(x - b)$$

$$= \frac{1}{a}x - \frac{b}{a} \cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $b = \frac{b}{a}(a \neq 1)$ 이므로 $b = 0$

$\therefore\ ab = 0$

9. 다음 함수의 역함수를 구하면?

$$y = x^2 - 3(\text{단, } x \geq 0)$$

① $y = \sqrt{x+1}(\text{단, } x \geq -1)$
② $y = \sqrt{x+2}(\text{단, } x \geq -2)$
③ $y = \sqrt{x+3}(\text{단, } x \geq -3)$
④ $y = \sqrt{x+4}(\text{단, } x \geq -4)$
⑤ $y = \sqrt{x+5}(\text{단, } x \geq -5)$

해설

$x \geq 0$이면 $y = x^2 - 3 \geq -3$이므로 주어진 함수의 치역은
$\{y \mid y \geq -3\}$
한편, $y = x^2 - 3$을 x에 대하여 풀면
$x^2 = y + 3$에서 $x = \pm\sqrt{y+3}$
이 때, $x \geq 0$이어야 하므로
$x = \sqrt{y+3}(\text{단, } y \geq -3)$
여기서, x, y를 서로 바꾸면
구하는 역함수는 $y = \sqrt{x+3}(\text{단, } x \geq -3)$