1. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 2$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 나눈 나머지가 $x + 3$ 이 되도록 $a,\ b$ 의 값을 정할 때, ab 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = -6$

해설

검산식을 사용

$x^3 + ax^2 + bx + 2 = (x^2 - x + 1) \cdot A + (x + 3)$

$A = (x + p)$

$x^3 + ax^2 + bx + 2 - (x + 3) = (x^2 - x + 1)(x + p)$

$x^3 + ax^2 + (b - 1)x - 1 = (x^2 - x + 1)(x - 1) \quad \therefore p = -1$

우변을 정리하면

$\therefore\ a = -2,\ b = 3$

$\therefore ab = -6$

2. $P=(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ 의 값을 구하면?

① $2^{32}-1$ ② $2^{32}+1$ ③ $2^{31}-1$
④ $2^{31}+1$ ⑤ $2^{17}-1$

해설

주어진 식에 $(2-1)=1$ 을 곱해도 식은 성립하므로

$P=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$

$=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^16+1)$

$=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$

$= \quad \vdots$

$=(2^{16}-1)(2^{16}+1)$

$=2^{32}-1$

3. 상수 a, b에 대하여 다음 등식이 항상 성립할 때, $2a+b$의 값은?

$$\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+3}=\frac{6(x+1)}{(x-1)(x+3)}$$

① 2 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

등식이 항상 성립하기 위해서는 (분모) $\neq 0$ 이어야 한다.
양변에 공통분모인 $(x-1)(x+3)$을 곱하면,
$a(x+3)+b(x-1)=6(x+1)$
$(a+b)x+(3a-b)=6x+6$
$\therefore\ a+b=6,\ 3a-b=6$
두 식을 연립하여 풀면,
$a=3,\ b=6-a=3$
$\therefore\ 2a+b=2\times3+3=9$

4. 다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 할 때, 나머지는?

① $f(2)$　② $f(-2)$　③ $f(2)+Q(2)$
④ $Q(2)$　⑤ $Q(-2)$

해설
$f(x)=(x-2)Q(x)+R$
$\therefore\ f(2)=R$

5. x^{30} 을 $x-3$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라 할 때, $Q(x)$ 의 상수항을 포함한 모든 계수들의 합을 구하면?

① $3^{30}+1$　② $3^{30}-1$　③ $\frac{1}{2}\left(3^{30}-1\right)$
④ $\frac{1}{3}\left(3^{30}-1\right)$　⑤ 0

해설

$x^{30}=(x-3)\,Q(x)+R$
양변에 $x=3$ 을 대입 하면, $3^{30}=R$
$x^{30}=(x-3)\,Q(x)+3^{30}$
양변에 $x=1$ 을 대입하면, $1=-2Q(1)+3^{30}$
$\therefore\ Q(1)=\frac{1}{2}\left(3^{30}-1\right)$
※ 다항식에서 상수항을 포함한 모든 계수의 합은 문자대신 1을 대입한 값과 같다.

6. 다음 중 인수분해가 잘못된 것을 고르면?

① $(x-y)^2 - xy(y-x) = (x-y)(x-y+xy)$

② $3a^2 - 27b^2 = 3(a+3b)(a-3b)$

③ $64a^3 - 125 = (4a+5)(16a^2 - 20a + 25)$

④ $(x^2 - x)(x^2 - x + 1) - 6 = (x^2 - x + 3)(x+1)(x-2)$

⑤ $2x^2 - 5x + 3 = (x-1)(2x-3)$

해설

$64a^3 - 125$
$= (4a)^3 - (5)^3$
$= (4a-5)\left(16a^2 + 20a + 25\right)$

7. 사차식 $x^4-10x^2y^2+9y^4$ 의 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① $x-3y$ ② $x-2y$ ③ $x-y$
④ $x+y$ ⑤ $x+3y$

해설

$x^4-10x^2y^2+9y^4=\left(x^2-9y^2\right)\left(x^2-y^2\right)$
$=(x-3y)(x+3y)(x-y)(x+y)$

8. 다음 중 $(x+y)^3-8y^3$ 의 인수인 것은?

① $x^2-2xy-4y^2$ ② $x^2-2xy+4y^2$ ③ $x^2+2xy+4y^2$
④ $x^2-4xy-7y^2$ ⑤ $x^2+4xy+7y^2$

해설

(준식)$=(x+y)^3-(2y)^3$
$=\{(x+y)-2y\}\{(x+y)^2+(x+y)2y+(2y)^2\}$
$=(x-y)(x^2+2xy+y^2+2xy+2y^2+4y^2)$
$=(x-y)(x^2+4xy+7y^2)$

9. $\dfrac{1}{\sqrt{-2}-\sqrt{-1}}$의 값은?

① $1-\sqrt{2}$ ② $-1-\sqrt{2}$ ③ $(1+\sqrt{2})i$
④ $-(1+\sqrt{2})i$ ⑤ $(1-\sqrt{2})i$

해설

$$\frac{1}{\sqrt{-2}-\sqrt{-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}\times\frac{1}{i}$$
$$= (\sqrt{2}+1)\times(-i)$$
$$= -(1+\sqrt{2})i$$

10. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① -2의 제곱근은 $\sqrt{2}i$와 $-\sqrt{2}i$이다.

② $\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}=-\sqrt{(-2)(-3)}$

③ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

④ $\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}}=\sqrt{\dfrac{-8}{-2}}$

⑤ $-\sqrt{-16}=-4i$

해설

③ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2i}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

11. 방정식 $(a^2-3)x-1=a(2x+1)$ 의 해가 존재하지 않기 위한 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(a^2-2a-3)x=a+1$

$(a-3)(a+1)x=a+1$

$\therefore a=3$ 이면 해가 없다.

12. 다음 설명 중 <u>틀린</u> 것을 고르면?

① $x^2 + 5x + 1 = 0$은 서로 다른 두 실근 을 가진다.

② $x^2 + 5 = 0$는 두 허근을 가진다.

③ $m = 0$ 또는 4일 때, $x^2 - mx + m = 0$은 중근을 가진다.

④ $k \geqq 1$일 때 $x^2 - 2x + 2 - k = 0$은 서로 다른 두 실근을 가진다

⑤ $x^2 - 6x + a = 0$ 은 $a = 9$일 때만 중근을 가진다.

해설

① $25 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 21 > 0$
② $0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -4 < 0$
③ $(-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = m(m-4) = 0$
⑤ $9 - 1 \cdot a = 9 - a = 0,\ a = 9$
$\Rightarrow$ ④ $(-1)^2 - 1 \cdot (2-k) = k - 1 > 0 \ \therefore\ k > 1$

13. $x^2-9x+3=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2+ax+b=0$이다. 이 때, 상수 $a+b$의 값은?

① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

해설

근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=9, \quad \alpha\beta=3$

9, 3을 근으로 하는 x^2의 계수가 1 이차방정식은

$(x-9)(x-3)=0$

$x^2-12x+27=0 \quad \therefore a=-12, \ b=27$

14. 이차함수 $y = x^2 - kx + 3k + 2$ 의 그래프에 의하여 잘려지는 x축의 길이가 3일 때, 모든 실수 k의 값의 합은?

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

해설

이차함수 $y = x^2 - kx + 3x + 2$ 의 그래프와 x 축과의 교점의 좌표를 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$ 이라 하면
$\alpha,\ \beta$ 는 이차방정식 $x^2 - kx + 3k + 2 = 0$ 이 두 근이다.
근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = k,\ \alpha\beta = 3k + 2$
잘려지는 x 축의 길이가 3이므로 $|\alpha - \beta| = 3$
이 때, $|\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$이므로 $9 = k^2 - 4(3k + 2)$
$k^2 - 12k - 17 = 0$
따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k의 값의 합은 12이다.

15. 이차함수 $y=x^2-2(k-1)x+9$의 그래프가 x축과 만나지 않기 위한 정수 k의 개수는?

① 4개 ② 5개 ③ 6개 ④ 7개 ⑤ 8개

해설

이차함수 $y = x^2-2(k-1)x+9$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면
이차방정식 $y=x^2-2(k-1)x+9=0$의 판별식을 D라 할 때 $D<0$이어야 한다.
$\frac{D}{4}=(k-1)^2-9<0$
$k^2-2k-8<0$, $(k+2)(k-4)<0$
$\therefore -2<k<4$
따라서, k값 중 정수인 것은 -1, 0, 1, 2, 3의 5개이다.

16. 삼차방정식 $x^3-7x^2+9x+9=0$의 근 중에서 무리수인 두 근을 $a,\ b$라 할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① -6　　② -2　　③ 2　　④ 4　　⑤ 8

해설

방정식을 인수분해하면 $x^3-7x^2+9x+9=0$

$(x-3)(x^2-4x-3)=0$

$x^2-4x-3=0$의 두 근이 $a,\ b(\because$ 무리수$)$

$a+b=4$

17. 사차방정식 $x^4 - 2x^3 + x^2 - 4 = 0$ 의 서로 다른 두 허근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

-1	1	-2	1	0	-4
		-1	3	-4	4
2	1	-3	4	-4	0
		2	-2	4	
	1	-1	2	0	

$(x+1)(x-2)(x^2-x+2)=0$
따라서 두 허근은 $x^2-x+2=0$ 의 근
허근의 합은 근과 계수와의 관계에 의해 $\alpha+\beta=1$

18. $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라고 할 때, $(\omega^2+1)^4 + (\omega^2+1)^8$의 값은?

① 0　　② 1　　③ -1　　④ ω　　⑤ $-\omega$

해설

$x^3 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; (x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\Rightarrow\; \omega^2 + \omega + 1 = 0,\; \omega^3 = 1$

$\Rightarrow\; (\omega^2+1)^4 + (\omega^2+1)^8 = (-\omega)^4 + (-\omega)^8$

$= \omega^3 \times \omega + (\omega^3)^2 \times \omega^2$

$= \omega^2 + \omega = -1$

19. 두 방정식 $(x+y-1)(x-y-1)=0$, $x^2-y^2=0$을 동시에 만족하는 해의 개수는?

① 없다.　② 1쌍　③ 2쌍　④ 3쌍　⑤ 4쌍

해설

연립방정식

$$\begin{cases} (x+y-1)(x-y-1)=0 & \cdots ㉠ \\ x^2-y^2=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $y=\pm(x-1)\cdots$㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2-(x-1)^2=0$,

$2x-1=0$

$\therefore\ x=\frac{1}{2}$

㉢에서 $y=\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}$

$\therefore$ 연립방정식의 해는 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$의 2쌍이다.

20. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+2x=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2+x+y=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 을 풀면 $x=\alpha,\ y=\beta$ 또는 $x=\gamma,\ y=\delta$ 이다. 이 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

인수분해되는 식은 없으나 이차항을 소거할 수 있다.

㉠ − ㉡에서 $x-y=-2$, 즉 $y=x+2$

㉠에 대입하여 정리하면

$x^2+3x+2=0$

$(x+1)(x+2)=0$

$\therefore\ x=-1,\ -2$

$\therefore\ x=-1,\ y=1$ 또는 $x=-2,\ y=0$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=6$

21. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $a>b, c>d$이면 $a+c>b+d$이다.
② $a>b,\ c>0$이면 $ac>bc,\ \frac{a}{c}>\frac{b}{c}$이다.
③ $a>b>0$이면 $a^2>b^2$이다.
④ $a>b,\ c>d$이면 $ac>bd$이다.
⑤ $a>b,\ c<0$이면 $ac<bc,\ \frac{a}{c}<\frac{b}{c}$이다.

해설
④ $a>b,\ c>d$이면 $ac>bd$
반례 : $a,\ b,\ c,\ d$가 음수인 경우는 $ac<bd$

22. 연립부등식 $\begin{cases} 2x+3 \geq x+a \\ -2x+b \geq \dfrac{2x+a}{2} \end{cases}$ 의 해가 $x=3$일 때, ab의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 72

해설

$2x+3 \geq x+a$에서 $x \geq a-3$

$-2x+b \geq \dfrac{2x+a}{2}$ 에서

$-4x+2b \geq 2x+a$, $6x \leq 2b-a$, $x \leq \dfrac{2b-a}{6}$

$\therefore a=6$, $b=12$

$\therefore ab=72$

23. 연립부등식

$\begin{cases} \dfrac{10-x}{4} \le a \\ 6x-5 \le 2x+1 \end{cases}$ 이 정수해를 가질 때, 정수 a 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\dfrac{10-x}{4} \le a,\ 10-x \le 4a, x \ge -4a+10$

$6x-5 \le 2x+1,\ 4x \le 6, x \le \dfrac{3}{2}$

정수해를 갖기 위해서는

$-4a+10 \le 1$

$\therefore a \ge \dfrac{9}{4}$

따라서 정수 a 의 최솟값은 3 이다.

24. 연속하는 세 자연수의 합이 69 보다 크고 72 이하일 때, 세 수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 23

▷ 정답 : 24

▷ 정답 : 25

해설

세 자연수를 $x-1$, x , $x+1$ 이라하면
$69 < x-1+x+x+1 \le 72$
$69 < 3x \le 72$
$23 < x \le 24$
$\therefore \quad x = 24$
따라서 연속하는 세 자연수는 23, 24, 25 이다.

25. 이차부등식 $-4x^2+12x-9 \geq 0$의 해는?

① $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ ② $x \leq -\frac{3}{2},\ x \geq \frac{3}{2}$
③ $x \neq \frac{3}{2}$인 모든 실수 ④ 해는 없다.
⑤ $x = \frac{3}{2}$

해설

$-4x^2+12x-9 \geq 0$
$\Rightarrow\ 4x^2-12x+9 \leq 0$
$\Rightarrow\ (2x-3)^2 \leq 0$
$\therefore\ x = \frac{3}{2}$

26. 부등식 $x^2 - 5|x| + 4 \leq 0$을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하면?

① 4개 ② 5개 ③ 6개 ④ 7개 ⑤ 8개

해설

(ⅰ) $x > 0$

$x^2 - 5x + 4 \leq 0$

$(x-1)(x-4) \leq 0$

$\Rightarrow \quad 1 \leq x \leq 4$

(ⅱ) $x < 0$

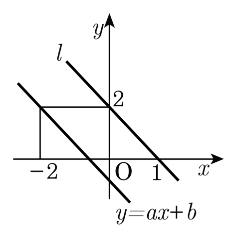
$x^2 + 5x + 4 \leq 0$

$(x+1)(x+4) \leq 0$

$\Rightarrow \quad -4 \leq x \leq -1$

$\therefore$ 정수의 개수 : 8개

27. 다음 직선 l 과 평행하면서 점 $(-2,\ 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $y = ax + b$ 이다. 이때, $a + b$ 의 값은 ?



① -4　　② -3　　③ -2

④ -1　　⑤ 0

해설

그림의 직선의 기울기는 -2 이므로
구하는 직선은 기울기가 -2 이고 점 $(-2,\ 2)$ 를 지난다.
$y - 2 = -2(x + 2),\ y = -2x - 2$
$y = -2x - 2,\ a = -2, b = -2$ 이므로,
$\therefore\ a + b = -4$

28. 세 점 A$(-2, 9)$, B$(3, -1)$, C$(5, a)$가 일직선 위에 있을 때, 상수 a의 값은 얼마인가?

① -6 ② -5 ③ 2 ④ 9 ⑤ 13

해설

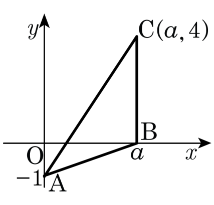
일직선 위에 있으려면 $\overline{\text{AB}}$, $\overline{\text{BC}}$의 기울기가 같다.

$\overline{\text{AB}}$의 기울기는 $\dfrac{9-(-1)}{-2-3} = -2$ 이고

$\overline{\text{BC}}$의 기울기는 $\dfrac{a-(-1)}{5-3}$ 이다.

$\therefore \ a = -5$

29. 다음 그림과 같이 점 $A(0,\ -1)$, $B(a,\ 0)$, $C(a,\ 4)$를 꼭지점으로 하는 ABC가 있다. 점 B를 지나면서 $\triangle ABC$의 넓이를 이등분하는 직선이 존재할 때, 직선의 방정식은?



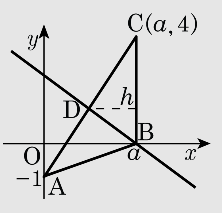
① $y=-\frac{4}{a}x+4$ ② $y=-\frac{3}{a}x+3$ ③ $y=-\frac{2}{a}x+2$
④ $y=-\frac{2}{a}x+1$ ⑤ $y=-\frac{1}{a}x+4$

해설

$\triangle ABC$의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{OB}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot a=2a$

점 B를 지나면서 $\triangle ABC$의 넓이를 이등분하는 직선과 $\overline{AC}$ 와의 교점을 D,
$\triangle BCD$에서 $\overline{BC}$를 밑변으로 보았을 때 높이를 h 라 하면



$(\triangle BCD\text{의 넓이})=\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot h=2h$

이 넓이는 $\triangle ABC$의 넓이의 $\frac{1}{2}$ 이므로

$2h=a \qquad \therefore h=\frac{a}{2}$

따라서 점 D의 x좌표는 $a-\frac{a}{2}=\frac{1}{2}a$

$\therefore$ D의 좌표는 $\left(\frac{a}{2},\ \frac{3}{2}\right)$

두 점 $B(a,0)$, $D\left(\frac{a}{2},\ \frac{3}{2}\right)$를 지나는

직선의 방정식은 $y-0=\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{a}{2}-a}(x-a)$

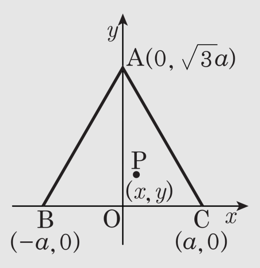
$\therefore y=-\frac{3}{a}x+3$

30. 좌표평면 위의 정삼각형 ABC에 대하여 $2\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2 + \overline{\mathrm{PC}}^2$ 을 만족시키는 점 P의 자취는 어떤 도형을 그리는가?

① 삼각형　　② 직선　　③ 선분
④ 원　　⑤ 원 아닌 곡선

해설

그림과 같이 변 BC의 중점을 원점으로 하는 좌표축을 설정하고 점 C의 좌표를 $\mathrm{C}(a, 0)$이라고 두면, $\mathrm{B}(-a, 0)$, $\mathrm{A}(0, \sqrt{3}a)$이다.



이 때, 점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(x, y)$ 라 하면

$2\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2 + \overline{\mathrm{PC}}^2$ 이므로

$$2\left\{x^2 + 2(y - \sqrt{3}a)^2\right\}$$
$$= (x+a)^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2$$

정리하여 간단히 하면, $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

$\therefore$ 직선

31. 다음<보기>는 방정식 $x^2+y^2-2x+y+k=0$ 에 대한 설명이다. 옳은 것을 모두 고르면 몇 개인가?

> ㉠ $k<\frac{5}{4}$ 이면 방정식은 원을 나타낸다.
> ㉡ $k=-\frac{5}{4}$ 일 때, 방정식은 중심이 $\left(1,-\frac{1}{2}\right)$ 이고, 반지름이 $\frac{5}{2}$ 이다.
> ㉢ $k<4$ 일 때, 방정식이 나타내는 도형은 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다.
> ㉣ $k=\frac{1}{4}$ 일 때, 방정식이 나타내는 도형은 y 축과 접한다.
> ㉤ $k<\frac{5}{4}$ 인 임의의 실수 k 에 대하여 방정 식이 나타내는 도형은 x 축과 y 축에 동 시에 접할 수 없다.

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

주어진 방정식을 정리하면,

$(x-1)^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{5}{4}-k$ 이다.

$y=0$ 을 대입 후 정리하면,$(x-1)^2=1-k$

$\Rightarrow$ $k<1$ 일 때 두 점에서 만난다.

㉣ $x=0$ 를 대입 후 정리하면,

$(y+\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}-k$

$\therefore$ $k=\frac{1}{4}$ 일 때 접한다.

㉤ 중심이 $y=x$ 위에 있지 않으므로 x 축, y 축 동시에 접하지 않는다.

$\therefore$ (㉠,㉣,㉤) 가 참이다.

32. 두 점 A$(-3,\ 8)$, B$(7,\ -4)$ 를 지름의 양 끝으로 하는 원의 방정식을 구하면?

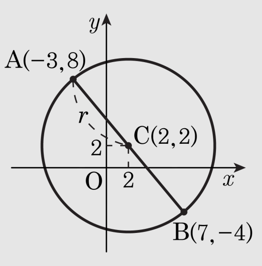
① $(x-1)^2+(y-1)^2=18$　　② $(x-2)^2+(y-2)^2=32$

③ $(x-1)^2+(y-1)^2=7$　　④ $(x-3)^2+(y-3)^2=22$

⑤ $(x-2)^2+(y-2)^2=61$

해설

구하는 원의 중심을 C 라고 하면



C 는 $\overline{AB}$ 의 중점이므로

$C\left(\dfrac{-3+7}{2},\ \dfrac{8-4}{2}\right)$

$\therefore C(2,2)$

반지름의 길이를 r 라고 하면

r 는 $\overline{AB}$ 의 길이의 $\dfrac{1}{2}$ 이므로

$r=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\overline{AC}=\sqrt{(2+3)^2+(2-8)^2}=\sqrt{61}$

따라서, 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-2)^2=61$

33. 중심이 $y = 2x$ 위에 있고, 두 점 $(2,\ 2)$, $(1,\ 1)$을 지나는 원의 방정식은?

① $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$ ② $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$
③ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$ ④ $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 2$
⑤ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2$

해설

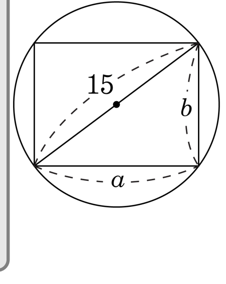
중심이 $y = 2x$ 위에 있다고 했으므로
두 점 $(2,\ 2)$, $(1,\ 1)$을 지나는
원의 중심은 $(a, 2a)$로 나타낼 수 있다.
$(a,\ 2a)$를 중심으로 하는 원을 식으로 표현하면
$(x-a)^2 + (y-2a)^2 = r^2$이다.
따라서 두 점 $(2,\ 2)$, $(1,\ 1)$은
$(x-a)^2 + (y-2a)^2 = r^2$를 지나므로 대입했을 때 등식이 성립한다.
두 식을 연립하면, 두 점 $(2,\ 2)$, $(1,\ 1)$을 지나는 원의 방정식이
$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$임을 알 수 있다.

34. 지름의 길이가 $15\,\text{cm}$ 인 원에 내접하며 둘레의 길이가 $42\,\text{cm}$ 인 직사각형의 두 변의 길이는?

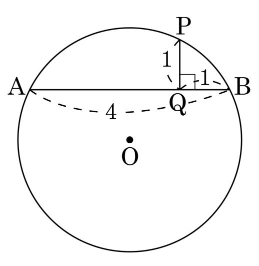
① $6\,\text{cm},\ 8\,\text{cm}$　② $6\,\text{cm},\ 10\,\text{cm}$　③ $6\,\text{cm},\ 12\,\text{cm}$
④ $9\,\text{cm},\ 10\,\text{cm}$　⑤ $9\,\text{cm},\ 12\,\text{cm}$

해설

ⅰ) $a+b=\dfrac{42}{2}=21$
ⅱ) $a^2+b^2=15^2$
ⅰ), ⅱ) 를 연립하면, $a^2+(21-a)^2-225=0$
$\Rightarrow\ \ a=12,\ 9$
$\therefore$ 　두 변의 길이는 $12\,\text{cm},\ 9\,\text{cm}$



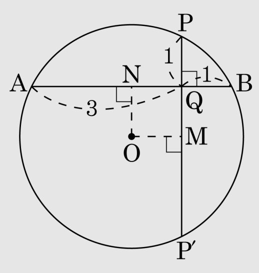
35. 다음 그림과 같이 한 원 O 의 호와 현으로 이루어진 도형에서 $\overline{\mathrm{AB}} = 4$, $\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{BQ}} = 1$ 일 때, 원 O 의 반지름의 길이의 제곱을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설



그림과 같이 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 연장선과 원 O 의 교점을 P′ 이라 하면

$\overline{\mathrm{P'Q}} = 3$ ($\because$ $\overline{\mathrm{PQ}} \cdot \overline{\mathrm{P'Q}} = \overline{\mathrm{AQ}} \cdot \overline{\mathrm{BQ}}$)

또, 원 O 의 중심에서 $\overline{\mathrm{AB}}, \overline{\mathrm{PP'}}$ 에 내린 수선의 발을 각각 N, M 이라 하면

원의 중심에서 현에 그은 수선은 현을 수직이등분하므로

$\overline{\mathrm{NB}} = \overline{\mathrm{PM}} = 2$

따라서 $\overline{\mathrm{NQ}} = \overline{\mathrm{QM}} = 1$ 이 되므로

□OMQN 은 정사각형이다.

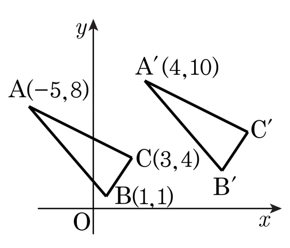
$\therefore$ $\overline{\mathrm{OM}} = 1$, $\overline{\mathrm{PM}} = 2$

그러므로 피타고라스의 정리에 의하여

$r = \overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$r^2 = 5$

36. 다음 그림의 삼각형 $A'B'C'$ 은 삼각형 ABC 를 평행이동한 도형이다. 두 점 B', C' 을 지나는 직선의 방정식이 $ax + by = 24$ 일 때, $a + b$ 의 값은? (단, a , b 는 상수)



① 1　　② 2　　③ 3

④ 4　　⑤ 5

해설

$\triangle A'B'C'$ 는 $\triangle ABC$ 를 x 축 방향으로 9 만큼, y 축 방향으로 2 만큼 평행이동한 도형이므로 $B'(10,\ 3)$, $C'(12,\ 6)$ 이다.
두 점 B', C' 를 지나는 직선의 방정식은

$$y - 3 = \frac{6-3}{12-10}(x - 10)$$

$3x - 2y = 24$,

$\therefore a + b = 1$

37. 평행이동 $(x,\ y) \to (x+a,\ y+b)$ 에 의하여 점 $(2,\ 1)$이 점 $(1,\ -1)$로 옮겨질 때, $(0,\ 0)$는 어느 점으로 옮겨지는가?

① $(1,\ 2)$ ② $(-1,\ 2)$ ③ $(1,\ -2)$
④ $(-1,\ -2)$ ⑤ $(2,\ 1)$

해설

점 $(2,\ 1)$이 점 $(1,\ -1)$로 옮겨지면, x축 방향으로 -1, y축 방향으로 -2만큼 평행이동 하므로 $(0-1,\ 0-2)=(-1,\ -2)$로 이동한다.

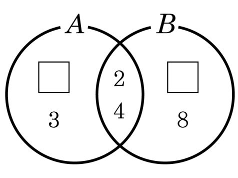
38. 포물선 $y = x^2 + 3$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼 y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하여 꼭짓점의 좌표가 (3, 7) 인 포물선을 얻을 수 있다. 이때, $b - a$ 의 값은?

① -1　　② 1　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

포물선 $y = x^2 + 3$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼,
y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면
$y - b = (x - a)^2 + 3$
$\therefore y = (x - a)^2 + b + 3$
이때, 꼭짓점의 좌표는 $(a, b + 3)$ 이므로
$a = 3, b + 3 = 7$　　$\therefore b = 4$
$\therefore b - a = 4 - 3 = 1$

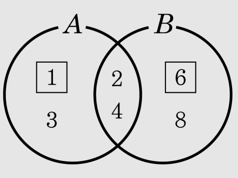
39. 두 집합 A, B 에 대하여 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $A \cap B = \{2, 4\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$ 일 때, 아래 벤 다이어그램의 빈 칸에 들어갈 알맞은 숫자들의 합을 써라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설



$\rightarrow 1 + 6 = 7$

40. 두 집합 $A = \{a,\ 5,\ a+6\}$, $B = \left\{x | x\text{는 } 14\text{의 약수}\right\}$ 에서 $A \cap B = \{1,\ 7\}$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$1 \in A$ 이므로 $a = 1$ 또는$a + 6 = 1$ 이다.
(i) $a = 1$ 이면 $A = \{1, 5, 7\}$, $A \cap B = \{1, 7\}$ 이다.
$\therefore\ a = 1$
(ii) $a + 6 = 1$ 즉, $a = -5$ 이면 $A = \{-5,\ 1,\ 5\}$, $A \cap B = \{1\}$ 이므로 조건에 맞지 않는다.
그러므로 $a = 1$ 이다.

41. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \cap B = A$ 일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $A \cup B = B$ ② $(A \cap B) \cup A = B$

③ $B \subset A$ ④ $A \subset (A \cup B)$

⑤ $(A \cap B) \cup (A \cup B) = B$

해설

$A \cap B = A$ 이면 $A \subset B$ 이다.

② $A \cap B = A$ 이면 $(A \cap B) \cup A = A \cup A = A$ 이므로 옳지 않다.

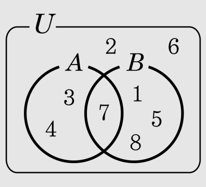
③ $A \subset B$ 이므로 옳지 않다.

42. $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A - B = \{3,4\}$, $B - A = \{1,5,8\}$, $(A \cup B)^c = \{2,6\}$ 에 대하여 집합 $A \cap B$ 는?

① $\{2\}$ ② $\{4\}$ ③ $\{7\}$ ④ $\{2,4\}$ ⑤ $\{2,7\}$

해설

벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같고 $A \cap B = \{7\}$ 이다.



43. 전체집합 $U = \left\{ x \mid x\text{는 } 12 \text{ 이하의 자연수} \right\}$ 의 부분집합 A , B 에 대하여 $B - A = \{2, 7, 10, 11\}$, $A = \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12\}$ 일 때, 집합 $(A \cup B)^C$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\varnothing$

해설

$n(U) - n(B - A) = 8$ 이고
$n(A) = 8$ 이므로 $A \cup B = U$ 이다.
$\therefore \ (A \cup B)^C = \varnothing$

44. 다음 두 조건 p, q 에 대하여 '$\sim p$ 또는 q '의 부정은?

$$p\ :\ -1 < x \le 3,\quad q\ :\ 0 < x \le 2$$

① $-1 < x \le 0$ 또는 $2 < x \le 3$

② $-1 < x < 0$ 또는 $2 \le x \le 3$

③ $-1 < x \le 3$

④ $0 < x \le 2$

⑤ x 는 모든 실수

해설

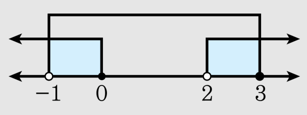
$\sim(\sim p$ 또는 $q)$ $\leftrightarrow$ p 이고 $\sim q$ 그런데

$\sim q$: $x \le 0$ 또는 $x > 2$ 이므로 p 이고 $\sim q$

$\leftrightarrow$ $(-1 < x \le 3)$ 이고 $(x \le 0$ 또는 $x > 2)$

$\leftrightarrow$ $(-1 < x \le 3$ 이고 $x \le 0)$ 또는 $(-1 < x \le 3$ 이고 $x > 2)$

$\leftrightarrow$ $-1 < x \le 0$ 또는 $2 < x \le 3$



45. 다음은 명제에 대한 설명이다. 옳은 것은?

① 어떤 명제가 참이면 그 역도 반드시 참이다.
② 어떤 명제가 참이면 그 명제의 대우도 참이다.
③ 어떤 명제의 역, 대우는 참, 거짓이 항상 일치한다.
④ 어떤 명제가 참이라고 해서 그 대우가 반드시 참인 것은 아니다.
⑤ 어떤 명제의 역의 역은 대우이다.

해설

명제가 참이면 그 명제의 대우도 항상 참이고, 명제가 거짓이면 그 명제의 대우도 항상 거짓이다.

46. 다음은 a, b, c가 실수일 때 $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$ 를 증명한 것이다.[가], [나]에 들어갈 내용을 차례대로 나열한 것은?

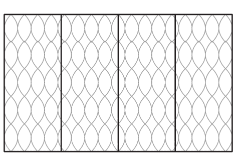
> $(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)$
> ([가]) $\big(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\big\}$ ([나])0
> $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca) \ge 0$ (단, 등호는 $a=b=0$ 일
> $a^2+b^2+c^2 \ge (ab+bc+ca)$
> 때 성립)

① $\frac{1}{2}$, $>$ ② $\frac{1}{2}$, $\ge$ ③ 2, $>$ ④ 2, $\ge$ ⑤ 2, $=$

해설

$(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)$
두식의차를변형하면
$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \ge 0$
$\because a, b, c$ 가 실수이므로 $(a-b)^2 \ge 0$,
$(b-c)^2 \ge 0, (c-a)^2 \ge 0$
$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca) \ge 0$ (단, 등호는 $a=b=c$ 일 때
$a^2+b^2+c^2 \ge (ab+bc+ca)$
성립)

47. 어떤 농부가 길이 60 m의 철망을 가지고 아래 그림과 같이 네 개의 작은 직사각형으로 이루어진 직사각형 모양의 우리를 만들려고 한다. 이 때, 전체 우리의 넓이의 최댓값은?



① 60m^2　② 70m^2　③ 80m^2

④ 90m^2　⑤ 100m^2

해설

전체 직사각형의 가로를 a, 세로를 b라 하면

$2a+5b=60$

a, b는 양수이므로

$60=2a+5b \ge 2\sqrt{2a\cdot 5b}$

양변을 제곱하면 $40ab \le 60^2$

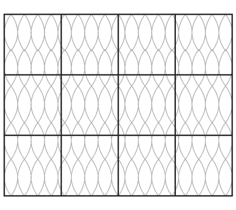
$\therefore\ ab \le 90$

한편, 직사각형의 넓이는 $S=ab$이므로

$S=ab\le 90$

따라서, 넓이의 최댓값은 $90(\text{m}^2)$

48. 어떤 농부가 길이 120 m 인 철망을 가지고 아래 그림과 같이 열두 개의 작은 직사각형 모양으로 이루어진 가축의 우리를 만들려고 한다. 전체 우리의 최대넓이를 구하여라.



① $120\,\mathrm{m}^2$ ② $180\,\mathrm{m}^2$ ③ $240\,\mathrm{m}^2$
④ $300\,\mathrm{m}^2$ ⑤ $360\,\mathrm{m}^2$

해설

전체의 가로를 x, 세로를 y라 하면
$4x + 5y = 120$
넓이 : xy
$4x + 5y = 120 \geq 2\sqrt{4x \cdot 5y}$
$60 \geq \sqrt{20xy}$, $3600 \geq 20xy$
$\therefore 180 \geq xy$
따라서 넓이의 최대값은 180

해설

$$\begin{aligned} xy &= x \times \frac{1}{5}(120 - 4x) \\ &= -\frac{4}{5}x^2 + 24x \\ &= -\frac{4}{5}(x^2 - 30x + 225 - 225) \\ &= -\frac{4}{5}(x - 15)^2 + 180 \end{aligned}$$

$x = 15(\mathrm{m})$, $y = 12(\mathrm{m})$ 일 때,
최대넓이는 $180\,\mathrm{m}^2$

49. 다음 보기 중 $X = \{-1,\ 1,\ 2\}$에서 $Y = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$로의 함수가 될 수 있는 것은 몇 개인가?

<보기>

㉠ $f : x \rightarrow \|x\|^2$	㉡ $g : x \rightarrow x+2$
㉢ $h : x \rightarrow \|x\|+1$	㉣ $i : x \rightarrow x^2-1$
㉤ $j : x \rightarrow \|x\|+3$	

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠ $f(-1) = |-1|^2 = 1 \in Y$
$f(1) = |1|^2 = 1 \in Y$
$f(2) = |2|^2 = 4 \in Y$
㉡ $g(-1) = -1+2 = 1 \in Y$
$g(1) = 1+2 = 3 \in Y$
$g(2) = 2+2 = 4 \in Y$
㉢ $h(-1) = |-1|+1 = 2 \in Y$
$h(1) = |1|+1 = 2 \in Y$
$h(2) = |2|+1 = 3 \in Y$
㉣ $i(-1) = i(1) = 0 \notin Y$
㉤ $j(2) = 5 \notin Y$
그러므로 ㉣, ㉤은 함수가 될 수 없고 ㉠, ㉡, ㉢ 3개 만 함수가 될 수 있다.

50. 집합 A에 대하여 함수

$$\begin{cases} f_A(x) = 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \notin A) \end{cases}$$ 로 정의한다.

$f_{A \cap B^c}(x) = 1$일 때, 다음 <보기> 중 그 값이 항상 1이 되는 것을 모두 고르면 무엇인가?

보기

㈎ $f_A(x) + f_B(x)$ ㈏ $f_A(x) - f_B(x)$

㈐ $f_A(x)f_B(x)$

① (가) ② (나) ③ (다)

④ (가), (나) ⑤ (나), (다)

해설

$x \in A \cap B^c$ 이므로 $x \in A,\ x \notin B$

따라서 $f_A(x) = 1,\ f_B(x) = 0$

51. 함수 $y=\dfrac{x+4}{x-2}$ 의 정의역은 $x\neq a$ 인 모든 실수이고 치역은 $y\neq b$ 인 모든 실수이다. 이 때, $a+b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

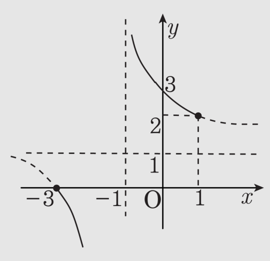
해설

함수 $y=\dfrac{x+4}{x-2}$ 의 정의역이 $x\neq a$ 인 모든 실수이고
치역이 $y\neq b$ 인 모든 실수이면 $x=a,\ y=b$는 점근선이다.
따라서 $y=\dfrac{(x-2)+6}{x-2}=\dfrac{6}{x-2}+1$ 에서
$a=2,\ b=1$ 이므로
$\therefore a+b=2+1=3$

52. 분수함수 $y = \dfrac{x+b}{ax+1}$ 의 그래프의 점근선 중 하나가 $x = -1$ 이고 점 $(1,\ 2)$ 를 지난다고 한다. 이 분수함수의 정의역이 $\{x \mid -3 \le x < -1$ 또는 $-1 < x \le 1\}$ 일 때, 치역을 구하면? (단, $a,\ b$ 는 상수)

① $\{y \mid y < 0$ 또는 $y > 2\}$
② $\{y \mid y \le 0$ 또는 $y \ge 2\}$
③ $\{y \mid 0 \le y \le 2\}$
④ $\{y \mid y < 1$ 또는 $1 < y \le 2\}$
⑤ $\{y \mid y < 1$ 또는 $y \ge 2\}$

해설



분수함수 $y = \dfrac{x+b}{ax+1}$ 의 그래프의 점근선 중 하나가 $x = -1$ 이므로

$x = -\dfrac{1}{a} = -1$

$\therefore\ a = 1$

따라서, 주어진 분수함수는 $y = \dfrac{x+b}{x+1}$ 이고

이 함수의 그래프가 점 $(1,\ 2)$ 를 지나므로

$2 = \dfrac{1+b}{1+1}$ $\quad \therefore b = 3$

$\therefore\ y = \dfrac{x+3}{x+1}$

따라서 $-3 \le x < -1$ 또는 $-1 < x \le 1$ 에서

$y = \dfrac{x+3}{x+1} = \dfrac{2}{x+1} + 1$ 의 그래프는

다음 그림과 같으므로 구하는 치역은

$\{y \mid y \le 0$ 또는 $y \ge 2\}$

53. 함수 $f(x)=\dfrac{ax}{2x+3}$ 는 그 정의역과 치역이 같다고 한다. a의 값은? (단, $x \neq -\dfrac{3}{2}$)

① -3　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 3

해설

$y=\dfrac{ax}{2x+3}=\dfrac{a}{2}+\dfrac{-\frac{3}{2}a}{2x+3}$ 이므로 치역은

$y \neq \dfrac{a}{2}$ 인 실수이다.

$\therefore \dfrac{a}{2}=-\dfrac{3}{2}$, 곧 $a=-3$

54. 다음 그래프 중 평행이동에 의하여 $y=\frac{1}{x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것은?

① $y=\frac{x+1}{x-1}$　② $y=\frac{x}{x-1}$　③ $y=\frac{x-2}{x-1}$
④ $y=\frac{-x}{x-1}$　⑤ $y=\frac{x+3}{x+1}$

해설

$y=\frac{1}{x}$ 과 겹쳐지는 함수는 $y=\frac{1}{x-a}+b$ 의 꼴로 된 것이다.

$\therefore$ ② $y=\frac{x}{x-1}=\frac{x-1+1}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$

55. $y = \dfrac{3-ax}{1-x}$ 의 그래프의 점근선이 $x=1$, $y=-2$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y = \dfrac{3-ax}{1-x} = \dfrac{ax-3}{x-1} = \dfrac{a-3}{x-1} + a$

이 분수함수의 점근선은 $x=1$, $y=a$

$\therefore\ a=-2$

56. 함수 $y=\dfrac{-2x}{x+3}$ 에 관한 설명 중 틀린 것을 고르면?

① 점근선 중 하나는 $x=-3$ 이다.

② 점근선 중 하나는 $y=-2$ 이다.

③ 함수 $y=\dfrac{6}{x}-2$ 의 그래프를 x 축 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프다.

④ 이 그래프는 x축, y축을 모두 지난다.

⑤ 함수 $y=\dfrac{6}{x+3}$ 의 그래프를 y 축 방향으로 -2 만큼 평행이동한 그래프다.

해설

$y=\dfrac{-2x}{x+3}=\dfrac{-2(x+3)+6}{x+3}=\dfrac{6}{x+3}-2$

그러므로 함수의 점근선은 $x=-3$, $y=-2$이고

$y=\dfrac{6}{x}$의 그래프를 x축 방향으로 -3만큼,

y축 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프이다.

따라서 설명 중 틀린 것은 ③이다.

57. 분수함수 $f(x)=\dfrac{3}{ax-4}+1$에 대해서 $(f\circ f)(x)=x$가 성립할 때, 상수 a의 값은?

① -5 ② -3 ③ -2 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(f\circ f)(x)=x$이려면 $f(x)=f^{-1}(x)$ 이어야 한다.
먼저 $f^{-1}(x)$ 를 구해보면,

$y=\dfrac{3}{ax-4}+1$

$\Rightarrow x=\dfrac{3}{a(y-1)}+\dfrac{4}{a}$

$\Rightarrow y=\dfrac{3}{a(x-1)}+\dfrac{4}{a}\cdots\cdots f^{-1}(x)$

$\therefore f(x)=f^{-1}(x)$이려면 $a=4$

58. 무리식 $\sqrt{2-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$ 의 값이 실수가 되도록 x의 범위를 정할 때, 정수 x의 개수는?

① 2 개 ② 3 개 ③ 4 개 ④ 5 개 ⑤ 6 개

해설

$2-x \geq 0,\ x+3>0$

$\therefore -3<x\leq 2$ 이므로 정수의 개수는 5 개

59. $a > 0, b < 0$일 때, $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} + |-a| + |-b|$를 간단히 하면?

① $2a - 2b$ ② $2a$ ③ $-2b$
④ $2a + 2b$ ⑤ 0

해설

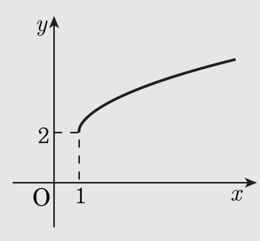
$a > 0,\ b < 0$이므로
$|a| + |b| + |-a| + |-b|$
$= a - b - (-a) + (-b) = 2a - 2b$

60. 무리함수 $y = \sqrt{ax+b} + c(a > 0)$ 의 정의역이 $\{ x \mid x \geq 1 \}$이고, 치역이 $\{ y \mid y \geq 2 \}$일 때, $\dfrac{2a^2 + c^2 - 2b}{2a}$ 의 최솟값을 구하면?

① $-\sqrt{2}$　② 1　③ $2\sqrt{2}$
④ $2\sqrt{2}+1$　⑤ $2\sqrt{2}+2$

해설

정의역과 치역의 조건에 의하여 주어진 무리함수의 그래프는 다음과 같다. 즉 $y = \sqrt{a(x-1)} + 2$의 형태임을 알 수 있다.



$y = \sqrt{ax+b} + c$와 비교해보면 $b = -a, c = 2$이다.

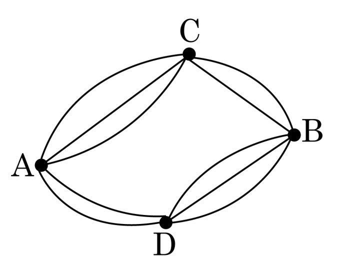
$\therefore \dfrac{2a^2 + c^2 - 2b}{2a} = \dfrac{2a^2 + 4 + 2a}{2a} = a + \dfrac{2}{a} + 1$

$a > 0$이므로 $a + \dfrac{2}{a} \geq 2\sqrt{2}$

따라서 $a + \dfrac{2}{a} + 1 \geq 2\sqrt{2} + 1$이므로

최솟값은 $2\sqrt{2} + 1$ 이다.

61. 다음 그림과 같이 A 지점에서 B 지점으로 가는 길이 있다. 갑, 을 두 사람이 A 에서 중간지점 C, D 를 각각 통과하여 B 로 가는 가짓수는 몇 가지인가? (단, 한 편이 통과한 중간지점을 다른 편이 통과할 수는 없다.)



① 72　② 36　③ 24　④ 12　⑤ 6

해설

(ⅰ) 갑이 C 를, 을이 D 를 통과하는 경우의 수 $(3\times2)\times(2\times3) = 36$
(ⅱ) 을이 C 를, 갑이 D 를 통과하는 경우의 수도 같은 방법으로 36가지
따라서, 구하는 경우의 수는 $36 + 36 = 72$ (가지)

62. 남자 5명, 여자 4명 중에서 남자 3명, 여자 2명을 뽑아서 일렬로 세우는 방법은 몇 가지인가?

① 1800 ② 3600 ③ 4800 ④ 5400 ⑤ 7200

해설

${}_5C_3 \times {}_4C_2 \times 5! = 7200$

63. *various* 의 7 개의 문자를 일렬로 나열할 때, 양 끝에 모두 자음이 오는 경우의 수는?

① 120　② 360　③ 600　④ 720　⑤ 1080

해설

자음 3 개중 2 개를 뽑아 일렬로 나열하는 수 : ${}_3P_2$
나머지 5 개 문자를 배열하는 수 : 5!
${}_3P_2 \times 5! = 720$

64. 7 개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 에서 서로 다른 5 개의 숫자를 택하여 5 자리의 정수를 만들 때, 4 의 배수인 수의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 624 개

해설

4의 배수이려면 끝의 두자리 수가 4의 배수이어야 하므로 5자리 수의 숫자 배열은 다음 중 하나이다.

□□□04	□□□24
□□□12	□□□32
□□□16	□□□36
□□□20	□□□40
□□□52	
□□□56	
□□□60	
□□□64	

∴ 구하는 개수는 $4 \times {}_5P_3 + 8 \times ({}_5P_3 - {}_4P_2) = 240 + 384 = 624$

65. ${}_nC_4 = {}_nC_6$ 을 만족하는 n 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $n = 10$

해설

$n = 4 + 6 = 10$

66. 등식 ${}_9P_5 = {}_9C_4 \times k!$ 을 만족하는 자연수 k 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

${}_9\mathrm{P}_5 = {}_9\mathrm{C}_5 \times 5! = {}_9\mathrm{C}_4 \times 5!$

$\therefore k = 5$

67. ${}_{15}C_0 + {}_{15}C_1 + {}_{15}C_2 + {}_{15}C_3 + {}_{15}C_4 + {}_{15}C_5 + {}_{15}C_6 + {}_{15}C_7$ 의 값으로 옳은 것은?

① 2^7 ② 2^8 ③ $2^7 + 2^8$
④ 2^{13} ⑤ 2^{14}

해설
${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ 이므로
${}_{15}C_0 = {}_{15}C_{15}$, ${}_{15}C_1 = {}_{15}C_{14}$, $\cdots$, ${}_{15}C_7 = {}_{15}C_8$
(준식) $= \frac{1}{2}({}_{15}C_0 + {}_{15}C_1 + {}_{15}C_2 + \cdots + {}_{15}C_{15})$
$= \frac{1}{2} \cdot 2^{15} = 2^{14}$

68. 자연수 n 에 대하여 ${}_{n+3}C_3 + \frac{{}_{n+3}C_2}{3} = \frac{32}{3}(n+3)$ 이 성립할 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $n = 6$

해설

${}_{n+3}C_3 = \frac{{}_{n+3}P_3}{3!} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$,

${}_{n+3}C_2 = \frac{{}_{n+3}P_2}{2!} = \frac{(n+2)(n+3)}{2}$,

${}_{n+3}C_3 + \frac{{}_{n+3}C_2}{3} = \frac{32}{3}(n+3)$ 에서

$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} + \frac{(n+2)(n+3)}{6} = \frac{32}{3}(n+3)$

양변에 $\frac{6}{n+3}$ 을 곱하여 정리하면

$n^2 + 4n - 60 = 0$, $(n-6)(n+10) = 0$

$\therefore n = 6$

69. 집합 $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{1, 2, 3, 4\}$가 있을 때, $f : X \to Y$ 중에서 $f(1) \neq 1$ 인 것은 모두 몇 가지인가?

① 24 ② 30 ③ 36 ④ 48 ⑤ 60

해설

$f(1) \neq 1$ 이므로 $f(1)$ 은 $2, 3, 4$ 중 하나의 값을 갖는다. $f(2), f(3)$ 은 $1, 2, 3, 4$ 중 중복을 허락하여 하나의 값을 갖는다.
$\therefore 3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$

70. 집합 $X = \{a, b, c, d\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 일대일 대응의 개수는?

① 16 개 ② 24 개 ③ 30 개 ④ 42 개 ⑤ 54 개

해설

집합 X 의 원소를 나열하는 방법의 수와 같다.

${}_4P_4 = 24$(개)