

1. $a > 0$ 일 때, $A = 1 + \frac{a}{2}$, $B = \sqrt{1+a}$ 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $A > B$

② $A < B$

③ $A \geq B$

④ $A \leq B$

⑤ $A = B$

해설

$a > 0$ 이므로 $1 + \frac{a}{2} > 0$, $\sqrt{1+a} > 0$

제곱을 하여 비교하면

$$\begin{aligned} A^2 - B^2 &= \left(1 + \frac{a}{2}\right)^2 - (\sqrt{1+a})^2 \\ &= 1 + a + \frac{a^2}{4} - 1 - a \\ &= \frac{a^2}{4} > 0 \end{aligned}$$

따라서 $A^2 > B^2$ 이므로 $A > B$ 이다.

2. 일차함수 $f(x)$ 가 $f(1) = -1$, $f^{-1}(3) = 2$ 일 때, $2f^{-1}(1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) 로 놓으면,

$f(1) = -1$, $f(2) = 3$ 이므로

$$f(1) = a + b = -1, f(2) = 2a + b = 3$$

즉, $a = 4$, $b = -5$

$$\therefore f(x) = 4x - 5$$

$f^{-1}(1) = a$ 로 놓으면 $f(a) = 1$

$$4a - 5 = 1 \quad \therefore a = \frac{3}{2}$$

$$\text{따라서 } f^{-1}(1) = \frac{3}{2}, 2f^{-1}(1) = 3$$

3. 다음 중 조건 p, q 에 대하여 명제 $p \rightarrow q$ 가 거짓인 것은? (단, x, y 는 실수이다.)

① $p : x = 1, \quad q : x^2 - 3x + 2 = 0$

② $p : x^2 = 1, \quad q : |x| = 1$

③ $p : x, y$ 는 홀수이다.
 $q : x + y$ 는 짝수이다.

④ 세 집합 A, B, C 에 대하여
 $p : A \cup C = B \cup C, \quad q : A = B$

⑤ $p : \square ABCD$ 는 마름모이다.
 $q : \square ABCD$ 는 평행사변형이다.

해설

① $x = 1$ 이면 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 이므로 참이다.

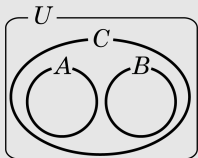
② $x^2 = 1$ 이면 $x = -1, 1$ 이므로

$$|x| = |-1| = |1| = 1$$

따라서, 주어진 명제는 참이다.

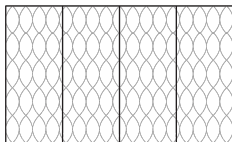
③ $x = 2m + 1, y = 2n + 1$ (m, n 은 정수) 이라 하면 $x + y = (2m + 1) + (2n + 1) = 2(m + n + 1)$ 이므로 참이다.

④ (반례) 벤 다이어그램에서 $A \subset C$ 이고 $B \subset C$ 이면 $A \cup C = B \cup C$ 이지만 $A \neq B$ 이다.



⑤ 마름모는 두 쌍의 대변이 각각 평행하므로 평행사변형이다.
 따라서, 주어진 명제는 참이다.

4. 어떤 농부가 길이 60m의 철망을 가지고 아래 그림과 같이 네 개의 작은 직사각형으로 이루어진 직사각형 모양의 우리를 만들려고 한다. 이 때, 전체 우리의 넓이의 최댓값은?



① 60m^2

② 70m^2

③ 80m^2

④ 90m^2

⑤ 100m^2

해설

전체 직사각형의 가로를 a , 세로를 b 라 하면

$$2a + 5b = 60$$

a, b 는 양수이므로

$$60 = 2a + 5b \geq 2\sqrt{2a \cdot 5b}$$

양변을 제곱하면 $40ab \leq 60^2$

$$\therefore ab \leq 90$$

한편, 직사각형의 넓이는 $S = ab$ 이므로

$$S = ab \leq 90$$

따라서, 넓이의 최댓값은 $90(\text{m}^2)$

5. $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = |2x - 3|$ 으로 주어질 때, 다음 중 $f(X)$ 의 원소가 아닌 것은 무엇인가? (단, $f(X)$ 는 함수 f 의 치역)

① 1

② 2

③ 3

④ 5

⑤ 7

해설

$f(x) = |2x - 3|$ 에서

$f(1) = 1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 3$, $f(4) = 5$, $f(5) = 7$ 이므로

$f(X) = \{1, 3, 5, 7\}$

$\therefore 2 \notin f(X)$

6. 다음 중 p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것을 모두 고르면? (단, a, b, c 는 실수이다.)

㉠ $p : |a| + |b| = 0 \quad q : ab = 0$

㉡ $p : (a-b)(b-c) = 0 \quad q : (a-b)^2 + (b-c)^2 = 0$

㉢ $p : 0 < x < y \quad q : x^2 < y^2$

㉤ $p : x < y \quad q : [x] < [y]$ (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수)

① ㉠, ㉡

② ㉡, ㉢

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉤

⑤ ㉡, ㉢, ㉤

해설

㉠ $p : |a| + |b| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ 이고 $b = 0 \quad q : ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ 또는 $b = 0 \therefore p \Rightarrow q$ 이고 $p \nLeftarrow q$ 이므로 만족

㉡ $p : (a-b)(b-c) = 0 \quad a = b$ 또는 $b = c \quad q : a = b$ 그리고 $b = c \therefore p \nRightarrow q$ 이고 $p \Leftarrow q$ 이므로 필요조건만 만족한다.

㉢ $p \Rightarrow q (\because x, y$ 모두 양수) $p \nLeftarrow q (\because x, y$ 모두 음수이거나 서로 부호가 다를 때 참이 아닐 수 있다.) $\therefore$ 만족

㉤ $p \nRightarrow q (\because x = 1, y = 1.5$ 일 때 $[1] = [1.5] = 1$ 일 수 있다.) $p \Leftarrow q$ 이므로 필요조건만 만족

7. 일차 이하의 다항함수 $y = f(x)$ 가 다음 세 조건을 만족한다.

I. $f(0) \leq f(1)$

II. $f(2) \geq f(3)$

III. $f(1) = 1$

이 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

< 보기 >

㉠ $f(2) = 1$

㉡ $f(3) = 3f(1)$

㉢ $f(-1) > f(1)$

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

일차 이하의 다항함수 중

조건 I, II를 만족하는 함수는

상수함수이므로 조건 III에 의하여 $f(x) = 1$ 이다.

따라서 옳은 것은 ㉠뿐이다.

8. 함수 $f(x) = -x + 3$ 에서 $f^{(2)} = f \circ f$, $f^{(3)} = f \circ f^{(2)}$, $\dots$, $f^{(n)} = f \circ f^{(n-1)}$ 라 정의 할 때, $f(1) + f^{(2)}(1) + f^{(3)}(2) + f^{(4)}(2) + \dots + f^{(2003)}(1002) + f^{(2004)}(1002)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3006

해설

$$f^{(2)}(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(-x + 3) = x$$

$$f^{(3)}(x) = (f \circ f^{(2)})(x) = f(f^{(2)}(x))$$

$$= f(x) \text{ 이므로}$$

$$f^{(2k-1)}(x) + f^{(2k)}(x) = 3 \text{ 이므로}$$

$$f(1) + f^{(2)}(1) = 3, \dots$$

$$f^{(2003)}(1002) + f^{(2004)}(1002) = 3 \text{ 이다.}$$

$$3 \text{ 이 } 1002 \text{ 개이므로 } 3 \times 1002 = 3006$$

9. A, B, C 세 학생 중 한 명이 지각을 하였다. 다음은 누가 지각을 했는가에 대한 서로의 주장이다.

A: 내가 지각을 하였다.

B: A의 말은 진실이다.

C: B는 거짓말을 하였고, B가 지각하였다.

세 사람 중 한 사람만이 진실을 말하고 있다고 할 때, 위의 진술에서 진실을 말하고 있는 학생과 지각을 한 학생을 차례대로 나열하면?

① A, A

② A, B

③ B, C

④ C, A

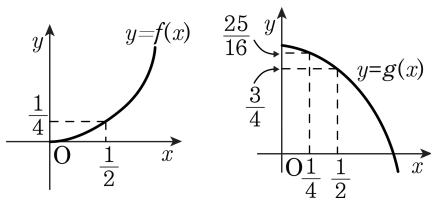
⑤ C, B

해설

- (i) A가 진실을 말한 경우 B는 거짓말을 한 것이었고 A의 말이 진실이 아닌 것이 되어 모순이다.
- (ii) B가 진실을 말한 경우 A는 거짓말을 한 것이고, 이는 B의 말과 모순이다.
- (iii) C가 진실을 말한 경우 A, B는 모두 거짓말을 하였고, B가 지각하였다.

따라서, 진실을 말한 학생은 C이고, 지각한 학생은 B이다.

10. 정의역이 실수 전체의 집합인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $x > 0$ 일 때의 그래프가 다음 그림과 같고, $f(-x) = -f(x)$, $g(-x) = g(x)$ 를 만족할 때, $(g \circ f)\left(-\frac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하면?



① 1

② $\frac{3}{2}$

③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{11}{9}$

⑤ $\frac{25}{16}$

해설

$f(-x) = -f(x)$ 이므로

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

$$g(-x) = g(x)$$

$$(g \circ f)\left(-\frac{1}{2}\right) = g\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = g\left(-\frac{1}{4}\right) = g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{25}{16}$$