

1. 두 점 $A(a, 2b+a)$, $B(-a, a)$ 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{(-a-a)^2 + (a-(2b+a))^2} \\ &= \sqrt{4a^2 + 4b^2} = 2\sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{5} \\ \therefore a^2 + b^2 &= 5 \end{aligned}$$

2. 세 점 A(2,1), B(4,3), C(a,0)에 대하여 $\overline{AC} = \overline{BC}$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값은 얼마인가?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\overline{AC} = \sqrt{(a-2)^2 + 1^2}, \overline{BC} = \sqrt{(a-4)^2 + 3^2}$$

$$\overline{AC} = \overline{BC} \text{에서 } \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$$

$$(a-2)^2 + 1 = (a-4)^2 + 9$$

$$4a = 20$$

$$\therefore a = 5$$

3. 두 점 A(-3,2), B(4,5)에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표는?

- ① (-3, 0) ② (1, 0) ③ (2, 0)

- ④ (-1, 0) ⑤ (5, 0)

해설

x축 위의 점을 P(x,0)라 하면

$\overline{PA} = \overline{PB}$ 에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$ 이므로

$$(x+3)^2 + (0-2)^2 = (x-4)^2 + (0-5)^2$$

$$14x = 28$$

따라서 $x = 2$ 즉, P(2, 0)

4. 세 꼭짓점의 좌표가 각각 $A(a, 3)$, $B(-1, -5)$, $C(3, 7)$ 인 $\triangle ABC$ 가 $\angle A$ 가 직각인 직각삼각형이 되도록 하는 상수 a 의 값들의 합은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\triangle ABC$ 에서 $\angle A$ 가 직각이므로
피타고라스의 정리에 의해
 $\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{BC}^2 \dots \text{㉠}$
이때, 세 점 $A(a, 3)$, $B(-1, -5)$, $C(3, 7)$ 에 대하여
 $\overline{AB}^2 = (-1 - a)^2 + (-5 - 3)^2 = a^2 + 2a + 65$
 $\overline{CA}^2 = (a - 3)^2 + (3 - 7)^2 = a^2 - 6a + 25$
 $\overline{BC}^2 = (3 + 1)^2 + (7 + 5)^2 = 160$ 이므로
㉠에 의해 $2a^2 - 4a + 90 = 160$
 $\therefore a^2 - 2a - 35 = 0$
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 a 의 값들의 합은 2이다.

5. 네 점 A(1, 4), B(-2, -3), C(x, y), D(6, 7)를 네 꼭짓점으로 하는 사각형이 평행사변형이 되도록 하는 점 C의 좌표는?

- ① C(-1, 2) ② C(3, 0) ③ C(3, 4)
④ C(1, -1) ⑤ C(0, 0)

해설

평행사변형의 대각선의 성질에 의해 \overline{AC} , \overline{BD} 의 중점이 일치하므로

$$\left(\frac{6-2}{2}, \frac{7-3}{2}\right) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+4}{2}\right)$$

$$(2, 2) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+4}{2}\right)$$

$$\therefore x=3, y=0$$

$$\therefore C(3, 0)$$

6. 세 점 $O(0,0)$, $A(2,4)$, $B(6,2)$ 와 선분 AB 위의 점 $P(a,b)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 넓이가 삼각형 OAP 의 넓이의 2배일 때, $a+b$ 의 값은?

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

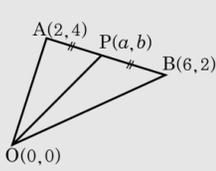
해설

다음 그림에서 $\triangle OAB$ 와 $\triangle OAP$ 의 높이가 같으므로 $\triangle OAB = 2\triangle OAP$ 이려면 P 는 선분 AB 의 중점이어야 한다.

이 때, $P\left(\frac{2+6}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$

즉 $P(4,3)$ 이므로 $a=4, b=3$

$\therefore a+b=7$



7. 두 점 $(1, -3)$, $(3, 2)$ 로부터 거리가 같고, 직선 $y = 2x$ 위에 있는 점의 좌표는?

① $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3})$

② $(\frac{1}{7}, \frac{1}{3})$

③ $(\frac{1}{8}, \frac{1}{3})$

④ $(\frac{1}{6}, \frac{1}{4})$

⑤ $(\frac{1}{8}, \frac{1}{4})$

해설

$y = 2x$ 위에 있으므로 $(a, 2a)$ 로 놓으면

$$\sqrt{(1-a)^2 + (-3-2a)^2}$$

$$= \sqrt{(3-a)^2 + (2-2a)^2}$$

$$a^2 - 2a + 1 + 4a^2 + 12a + 9 = a^2 - 6a + 9 + 4a^2 - 8a + 4$$

$$10a + 10 = -14a + 13$$

$$\therefore 24a = 3$$

$$\therefore a = \frac{1}{8}, 2a = \frac{1}{4}$$

$$\therefore (\frac{1}{8}, \frac{1}{4})$$

8. 삼각형 ABC의 외접원의 중심 P가 x축 위에 있고, 두 점 A,B의 좌표가 각각 A(-2,1),B(3,4)일 때, 점 P의 x좌표는?

- ① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{7}{3}$

해설

점 P가 삼각형 ABC의 외접원의 중심이므로 $\overline{AP} = \overline{BP}$

점 P의 좌표를 (a, 0)으로 놓으면

$$\sqrt{(a+2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{(a-3)^2 + (-4)^2}$$

양변 제곱하여 정리하면

$$a^2 + 4a + 5 = a^2 - 6a + 25, 10a = 20$$

$$\therefore a = 2$$

9. 점 A(5, -4), B(-1, 2) 를 잇는 선분 AB 를 1 : 2 로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q 라고 할 때, 선분 PQ 의 중점 M 의 좌표를 (a, b) 라고 하자. 이 때, a + b 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$P \left(\frac{1 \cdot (-1) + 2 \cdot 5}{1 + 2}, \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot (-4)}{1 + 2} \right) = (3, -2)$$

$$Q \left(\frac{1 \cdot (-1) - 2 \cdot 5}{1 - 2}, \frac{1 \cdot 2 - 2 \cdot (-4)}{1 - 2} \right) = (11, -10)$$

선분 PQ 의 중점 M

$$(a, b) = \left(\frac{11 + 3}{2}, \frac{-2 - 10}{2} \right) = (7, -6)$$

$$\therefore a + b = 1$$

10. 세 점 $A(2, 5)$, $B(-1, 0)$, $C(4, 1)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 에서
 변 BC 위의 점 M 에 대하여 $\triangle ABM = \triangle ACM$ 일 때, $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2$ 의
 값은?

- ① 25 ② 27 ③ 29 ④ 31 ⑤ 33

해설

$\triangle ABM = \triangle ACM$ 이므로 $\overline{BM} = \overline{CM}$
 이다.

따라서 파포스의 정리에 의하여
 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$

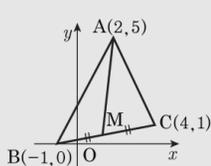
$$\therefore \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2$$

$$= \frac{1}{2}(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2)$$

$$= \frac{1}{2}[\{(-1-2)^2 + (0-5)^2\}$$

$$+ \{(4-2)^2 + (1-5)^2\}]$$

$$= \frac{1}{2}(9 + 25 + 4 + 16) = 27$$



11. 세 점 A(2,1), B(1,3), C(2,0)에 대하여 $2\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 3\overline{CP}^2$ 을 만족하는 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구하면?

- ① $x - y + 1 = 0$ ② $x + 2y + 3 = 0$ ③ $x - 3y - 2 = 0$
 ④ $x - 4y + 5 = 0$ ⑤ $x - 5y + 4 = 0$

해설

점 P의 좌표를 (x,y)라 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 &= (x-2)^2 + (y-1)^2 \\ &= x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 \\ &= x^2 - 4x + y^2 - 2y + 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{BP}^2 &= (x-1)^2 + (y-3)^2 \\ &= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 \\ &= x^2 - 2x + y^2 - 6y + 10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{CP}^2 &= (x-2)^2 + y^2 \\ &= x^2 - 4x + 4 + y^2 \\ &= x^2 - 4x + y^2 + 4\end{aligned}$$

$2\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 3\overline{CP}^2$ 에서

$$2(x^2 - 4x + y^2 - 2y + 5) + x^2 - 2x + y^2 - 6y + 10 =$$

$$3(x^2 - 4x + y^2 + 4)$$

$$3x^2 - 10x + 3y^2 - 10y + 20 = 3x^2 - 12x + 3y^2 + 12$$

$$2x - 10y + 8 = 0$$

$$\therefore x - 5y + 4 = 0$$

12. 좌표평면 위의 두 점 A(1,0), B(5,4)에 대하여 조건 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 를 만족하는 점 P의 자취의 방정식을 구하면?

- ① $x - y + 1 = 0$ ② $x + 2y + 4 = 0$ ③ $x + y + 3 = 0$
④ $x - 3y + 4 = 0$ ⑤ $x + y - 5 = 0$

해설

점 P의 좌표를 (x, y)로 놓고 주어진 조건

$\overline{PA} = \overline{PB}$ 를 이용하여

x, y사이의 관계식을 구한다.

점 P의 좌표를 (x, y)로 놓자.

이때, $\overline{PA} = \overline{PB}$ 에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$ 이므로

$$(x-1)^2 + (y-0)^2 = (x-5)^2 + (y-4)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 8y + 16$$

$$8x + 8y - 40 = 0$$

$$\therefore x + y - 5 = 0$$

13. 두 점 A(1, 5), B(5, 3)에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 값이 최소가 되는 점 P의 좌표는?

- ① (4, 5) ② (3, 4) ③ (2, 3)
④ (1, 2) ⑤ (0, 1)

해설

$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 값이 최소가 되기 위한 점 P는 점 A와 점 B의 중점이어야 한다.
따라서 P(3, 4)

해설

P(x, y)로 놓으면
$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 &= \{(x-1)^2 + (y-5)^2\} \\ &\quad + \{(x-5)^2 + (y-3)^2\} \\ &= 2x^2 - 12x + 2y^2 - 16y + 60 \\ &= 2(x^2 - 6x + 9) + 2(y^2 - 8y + 16) + 10 \\ &= 2(x-3)^2 + 2(y-4)^2 + 10\end{aligned}$$
따라서 $x = 3$, $y = 4$ 일 때 최솟값을 갖는다.

14. 세 점 A(1, 6), B(-2, 2), C(4, 1)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC와 임의의 점 P(a, b)에 대하여 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 의 값이 최소일 때, a+b의 값은?

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} & \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 \\ &= \{(a-1)^2 + (b-6)^2\} + \{(a+2)^2 + (b-2)^2\} \\ & \quad + \{(a-4)^2 + (b-1)^2\} \\ &= 3a^2 - 6a + 3b^2 - 18b + 62 \\ &= 3(a^2 - 2a + 1) + 3(b^2 - 6b + 9) + 32 \\ &= 3(a-1)^2 + 3(b-3)^2 + 32 \end{aligned}$$

이때, a, b는 실수이므로
 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 의 값은
a=1, b=3일 때 최소이다.
 $\therefore a+b=4$

15. 세 점 $A(-1, -4)$, $B(3, -3)$, $C(7, 1)$ 과 좌표평면 위의 점 P 에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값은?

- ㉠ 46 ㉡ 45 ㉢ 44 ㉣ 43 ㉤ 42

해설

점 P 를 $P(x, y)$ 라고 하면

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$$

$$= \{(x+1)^2 + (y+4)^2\}$$

$$+ \{(x-3)^2 + (y+3)^2\}$$

$$+ \{(x-7)^2 + (y-1)^2\}$$

$$= x^2 + 2x + 1 + y^2 + 8y + 16 + x^2 - 6x + 9$$

$$+ y^2 + 6y + 9 + x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1$$

$$= 3x^2 - 18x + 3y^2 + 12y + 85$$

$$= 3(x^2 - 6x + 9) + 3(y^2 + 4y + 4) + 46$$

$$= 3(x-3)^2 + 3(y+2)^2 + 46$$

따라서 $x = 3$, $y = -2$ 일 때,

$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값은 46 이다.

16. $\triangle ABC$ 의 변 BC 의 중점을 M 이라 할 때, $\overline{AB} = 8$, $\overline{AC} = 6$, $\overline{BC} = 10$ 이면 \overline{AM} 의 길이는?

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

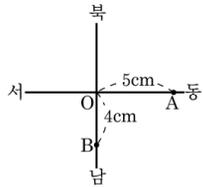
$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 \text{ 이므로}$$

$\triangle ABC$ 는 직각삼각형이다.

그리고 빗변인 \overline{BC} 의 중점인 M 은 직각삼각형의 외심이다.

$$\therefore \overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = 5$$

17. 다음의 그림과 같이 수직으로 만나는 도로가 있다. 교차점에서 A는 동쪽으로 5km, B는 남쪽으로 4km의 지점에 있다. A는 시속 4km로 서쪽으로, B는 시속 2km로 북쪽으로 향해서 동시에 출발했을 때, A와 B의 거리가 가장 짧을 때는 몇 시간 후인가?



- ① 1.4시간 후 ② 1.5시간 후 ③ 1.6시간 후
 ④ 1.7시간 후 ⑤ 1.8시간 후

해설

남북을 y 축, 동서를 x 축으로 하면 최초의 A, B의 위치의 좌표는 A(5, 0), B(0, -4) 이다. 이 때, t 시간 후의 A, B의 좌표는 A(5-4t, 0), B(0, -4+2t)로 나타낼 수 있다. 따라서 t 시간 후

$$\text{의 A, B사이의 거리 } s \text{ 는 } s = \sqrt{\{0 - (5 - 4t)\}^2 + \{-4 + 2t - 0\}^2}$$

$$= \sqrt{20t^2 - 56t + 41} = \sqrt{20\left(t - \frac{14}{10}\right)^2 + \frac{9}{5}}$$

s 는 $t = \frac{14}{10}$ 일 때, 최솟값을 갖는다.

18. $\triangle ABC$ 의 변 BC, CA, AB의 중점이 각각 P(-1, a), Q(3, 3), R(1, 6)이고, 이 삼각형의 무게중심의 좌표가 $(b, \frac{10}{3})$ 일 때, ab의 값은?

- ① 1 ② $2\sqrt{5}$ ③ 3 ④ 4 ⑤ $4\sqrt{5}$

해설

$\triangle ABC$ 의 무게중심은 $\triangle PQR$ 의 무게중심과 일치하게 되므로,

$$\left(\frac{-1+3+1}{3}, \frac{a+3+6}{3}\right) = \left(b, \frac{10}{3}\right)$$

$$b=1, \frac{a+9}{3} = \frac{10}{3}$$

$$a=1, b=1 \therefore ab=1$$

19. 두 점 A(-2, 1), B(4, -3)에서 같은 거리에 있고 직선 $y = 2x - 1$ 위에 있는 점의 좌표는?

- ① (-3, -7) ② (-2, -5) ③ (3, 5)

- ④ (2, 3) ⑤ (3, 2)

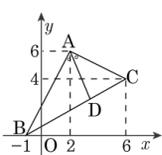
해설

직선 $y = 2x - 1$ 위에 있는 점을 $P(a, b)$ 라 하면 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 에서
 $(a+2)^2 + (b-1)^2 = (a-4)^2 + (b+3)^2$
 $12a - 8b = 20$
 $\therefore 3a - 2b = 5 \dots \dots \textcircled{1}$
 또, 점 P는 $y = 2x - 1$ 위에 있으므로
 $b = 2a - 1 \dots \dots \textcircled{2}$
 ①, ②를 연립하여 풀면 $a = -3, b = -7$

해설

두 점으로부터 같은 거리에 있으므로 구하는 점은
 A(-2,1), B(4,-3)의 수직이등분선 위에 있다.
 \overline{AB} 의 기울기는 $\frac{1+3}{-2-4} = -\frac{2}{3}$ 이므로
 수직이등분선의 기울기는 $\frac{3}{2}$, A(-2,1), B(4,-3)의 중점 (1,-1)
 를 지나므로
 $\therefore y + 1 = \frac{3}{2}(x - 1) \dots \textcircled{1}$
 구하는 점 P는 $y = 2x - 1$ 과 ①의 교점이다.
 연립하여 풀면 $x = -3, y = -7$
 $\therefore P(-3, -7)$

20. 다음 그림과 같이 세 점 $A(2,6)$, $B(-1,0)$, $C(6,4)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라고 할 때, 점 D 의 좌표는?



- ① $(2, \frac{6}{5})$ ② $(\frac{12}{5}, \frac{8}{5})$ ③ $(\frac{14}{5}, 2)$
 ④ $(\frac{16}{5}, \frac{12}{5})$ ⑤ $(\frac{18}{5}, \frac{14}{5})$

해설

점 D 는 $\angle A$ 의 이등분선과 변 BC 의 교점이므로

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC} \text{ 이다.}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{5},$$

$$\overline{AC} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5} \text{ 이므로}$$

$$\overline{BD} : \overline{DC} = 3 : 2$$

따라서 점 D 는 선분 BC 를 $3 : 2$ 로 내분하는 점이므로

$$\text{점 } D \text{ 의 좌표는 } \left(\frac{18-2}{3+2}, \frac{12+0}{3+2} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5} \right)$$