1. 두 점 $\mathrm{A}(a,\ 2b+a)$, $\mathrm{B}(-a,\ a)$ 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$일 때, a^2+b^2의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}} &= \sqrt{(-a-a)^2+\{a-(2b+a)\}^2}\\ &= \sqrt{4a^2+4b^2} = 2\sqrt{a^2+b^2} = 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

$\therefore\ a^2+b^2=5$

2. 세 점 $A(2,1)$, $B(4,3)$, $C(a,0)$에 대하여 $\overline{AC}=\overline{BC}$가 성립할 때, 상수 a의 값은 얼마인가?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\overline{AC} = \sqrt{(a-2)^2+1^2}$, $\overline{BC} = \sqrt{(a-4)^2+3^2}$

$\overline{AC}=\overline{BC}$에서 $\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$

$(a-2)^2+1=(a-4)^2+9$

$4a=20$

$\therefore\ a=5$

3. 두 점 $A(-3, 2)$, $B(4, 5)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표는?

① $(-3,\ 0)$ ② $(1,\ 0)$ ③ $(2,\ 0)$

④ $(-1,\ 0)$ ⑤ $(5,\ 0)$

해설

x축 위의 점을 $P(x, 0)$라 하면

$\overline{PA} = \overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$이므로

$(x+3)^2 + (0-2)^2 = (x-4)^2 + (0-5)^2$

$14x = 28$

따라서 $x = 2$ 즉, $P(2,\ 0)$

4. 세 꼭짓점의 좌표가 각각 $\mathrm{A}(a, 3)$, $\mathrm{B}(-1, -5)$, $\mathrm{C}(3, 7)$ 인 $\triangle\mathrm{ABC}$가 $\angle\mathrm{A}$가 직각인 직각삼각형이 되도록 하는 상수 a의 값들의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\triangle\mathrm{ABC}$에서 $\angle\mathrm{A}$가 직각이므로
피타고라스의 정리에 의해
$\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{CA}}^2 = \overline{\mathrm{BC}}^2 \cdots$ ㉠
이때, 세 점 $\mathrm{A}(a, 3)$, $\mathrm{B}(-1, -5)$, $\mathrm{C}(3, 7)$에 대하여

$\overline{\mathrm{AB}}^2 = (-1-a)^2 + (-5-3)^2 = a^2 + 2a + 65$

$\overline{\mathrm{CA}}^2 = (a-3)^2 + (3-7)^2 = a^2 - 6a + 25$

$\overline{\mathrm{BC}}^2 = (3+1)^2 + (7+5)^2 = 160$ 이므로
㉠에 의해 $2a^2 - 4a + 90 = 160$
$\therefore\ a^2 - 2a - 35 = 0$
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 a의 값들의 합은 2이다.

5. 네 점 $A(1,4)$, $B(-2,-3)$, $C(x,y)$, $D(6,7)$를 네 꼭짓점으로 하는 사각형이 평행사변형이 되도록 하는 점 C의 좌표는?

① $C(-1,\ 2)$ ② $C(3,\ 0)$ ③ $C(3,\ 4)$

④ $C(1,\ -1)$ ⑤ $C(0,\ 0)$

해설

평행사변형의 대각선의 성질에 의해 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$의 중점이 일치하므로

$$\left(\frac{6-2}{2},\ \frac{7-3}{2}\right)=\left(\frac{x+1}{2},\ \frac{y+4}{2}\right)$$

$$(2\ ,\ 2)=\left(\frac{x+1}{2},\ \frac{y+4}{2}\right)$$

$\therefore\ x=3\ ,\ y=0$

$\therefore\ C(3,0)$

6. 세 점 $O(0,0), A(2,4), B(6,2)$ 와 선분 AB 위의 점 $P(a,b)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 넓이가 삼각형 OAP 의 넓이의 2배일 때, $a+b$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

다음 그림에서 $\triangle OAB$ 와 $\triangle OAP$ 의 높이가 같으므로

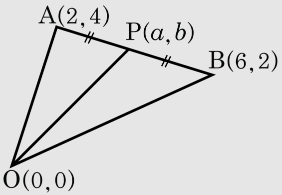
$\triangle OAB = 2\triangle OAP$ 이려면

P 는 선분 AB 의 중점이어야 한다.

이 때, $P\left(\dfrac{2+6}{2}, \dfrac{4+2}{2}\right)$

즉 $P(4,3)$ 이므로 $a=4, b=3$

$\therefore a+b=7$



7. 두 점 $(1,-3)$, $(3,2)$로부터 거리가 같고, 직선 $y=2x$ 위에 있는 점의 좌표는?

① $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$ ② $\left(\frac{1}{7}, \frac{1}{3}\right)$ ③ $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{3}\right)$
④ $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right)$ ⑤ $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$

해설

$y=2x$ 위에 있으므로 $(a, 2a)$로 놓으면

$$\sqrt{(1-a)^2+(-3-2a)^2}$$
$$=\sqrt{(3-a)^2+(2-2a)^2}$$
$$a^2-2a+1+4a^2+12a+9=a^2-6a+9+4a^2-8a+4$$
$$10a+10=-14a+13$$
$$\therefore\ 24a=3$$
$$\therefore\ a=\frac{1}{8},\ 2a=\frac{1}{4}$$
$$\therefore\ \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$$

8. 삼각형 ABC 의 외접원의 중심 P가 x축 위에 있고, 두 점 A, B 의 좌표가 각각 $\mathrm{A}(-2,1), \mathrm{B}(3,4)$ 일 때, 점 P 의 x좌표는?

① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{7}{3}$

해설

점 P가 삼각형 ABC 의 외접원의 중심이므로 $\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}}$

점 P 의 좌표를 $(a,\ 0)$ 으로 놓으면

$\sqrt{(a+2)^2+(-1)^2} = \sqrt{(a-3)^2+(-4)^2}$

양변 제곱하여 정리하면

$a^2+4a+5 = a^2-6a+25,\ 10a = 20$

$\therefore\ a = 2$

9. 점 $\mathrm{A}(5,-4), \mathrm{B}(-1,2)$ 를 잇는 선분 AB 를 $1:2$ 로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q 라고 할 때, 선분 PQ 의 중점 M 의 좌표를 (a,b) 라고 하자. 이 때, $a+b$ 의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$$\mathrm{P}\left(\frac{1\cdot(-1)+2\cdot 5}{1+2}, \frac{1\cdot 2+2\cdot(-4)}{1+2}\right) = (3,\ -2)$$

$$\mathrm{Q}\left(\frac{1\cdot(-1)-2\cdot 5}{1-2}, \frac{1\cdot 2-2\cdot(-4)}{1-2}\right) = (11,\ -10)$$

선분 PQ 의 중점 M

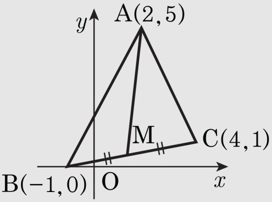
$$(a,b) = \left(\frac{11+3}{2}, \frac{-2-10}{2}\right) = (7,\ -6)$$

$\therefore\ a+b=1$

10. 세 점 A(2, 5), B(−1, 0), C(4, 1)을 꼭짓점으로 하는 △ABC에서 변 BC 위의 점 M에 대하여 △ABM = △ACM일 때, $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2$의 값은?

① 25　② 27　③ 29　④ 31　⑤ 33

해설



△ABM = △ACM이므로 $\overline{BM} = \overline{CM}$ 이다.

따라서 파포스의 정리에 의하여

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\left(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2\right)$$

$$\therefore \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left\{(-1-2)^2 + (0-5)^2\right\} + \left\{(4-2)^2 + (1-5)^2\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}(9 + 25 + 4 + 16) = 27$$

11. 세 점 $\mathrm{A}(2,1), \mathrm{B}(1,3), \mathrm{C}(2,0)$에 대하여 $2\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 = 3\overline{\mathrm{CP}}^2$을 만족하는 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구하면?

① $x-y+1=0$ ② $x+2y+3=0$ ③ $x-3y-2=0$

④ $x-4y+5=0$ ⑤ $x-5y+4=0$

해설

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}^2 &= (x-2)^2 + (y-1)^2 \\ &= x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 \\ &= x^2 - 4x + y^2 - 2y + 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{BP}}^2 &= (x-1)^2 + (y-3)^2 \\ &= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 \\ &= x^2 - 2x + y^2 - 6y + 10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{CP}}^2 &= (x-2)^2 + y^2 \\ &= x^2 - 4x + 4 + y^2 \\ &= x^2 - 4x + y^2 + 4\end{aligned}$$

$2\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 = 3\overline{\mathrm{CP}}^2$에서

$2\left(x^2 - 4x + y^2 - 2y + 5\right) + x^2 - 2x + y^2 - 6y + 10 = 3\left(x^2 - 4x + y^2 + 4\right)$

$3x^2 - 10x + 3y^2 - 10y + 20 = 3x^2 - 12x + 3y^2 + 12$

$2x - 10y + 8 = 0$

$\therefore x - 5y + 4 = 0$

12. 좌표평면 위의 두 점 $A(1,0), B(5,4)$에 대하여 조건 $\overline{PA}=\overline{PB}$를 만족하는 점 P의 자취의 방정식을 구하면?

① $x-y+1=0$ ② $x+2y+4=0$ ③ $x+y+3=0$

④ $x-3y+4=0$ ⑤ $x+y-5=0$

해설

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓고 주어진 조건
$\overline{PA}=\overline{PB}$를 이용하여
$x,\ y$사이의 관계식을 구한다.
점 P의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓자.

이때, $\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(x-1)^2+(y-0)^2=(x-5)^2+(y-4)^2$

$x^2-2x+1+y^2=x^2-10x+25+y^2-8y+16$

$8x+8y-40=0$

$\therefore x+y-5=0$

13. 두 점 A(1, 5), B(5, 3)에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 값이 최소가 되는 점 P의 좌표는?

① (4, 5) ② (3, 4) ③ (2, 3)
④ (1, 2) ⑤ (0, 1)

해설

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 값이 최소가 되기 위한
점 P는 점 A와 점 B의 중점이어야 한다.
따라서 P(3, 4)

해설

P(x, y)로 놓으면

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2 &= \{(x-1)^2+(y-5)^2\} \\ &\quad +\{(x-5)^2+(y-3)^2\} \\ &= 2x^2-12x+2y^2-16y+60 \\ &= 2(x^2-6x+9)+2(y^2-8y+16)+10 \\ &= 2(x-3)^2+2(y-4)^2+10\end{aligned}$$

따라서 $x=3$, $y=4$일 때 최솟값을 갖는다.

14. 세 점 $A(1,\ 6)$, $B(-2,\ 2)$, $C(4,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC와 임의의 점 $P(a,\ b)$에 대하여 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 값이 최소일 때, $a+b$의 값은?

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

해설

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$$
$$=\left\{(a-1)^2+(b-6)^2\right\}+\left\{(a+2)^2+(b-2)^2\right\}$$
$$+\left\{(a-4)^2+(b-1)^2\right\}$$
$$=3a^2-6a+3b^2-18b+62$$
$$=3\left(a^2-2a+1\right)+3\left(b^2-6b+9\right)+32$$
$$=3(a-1)^2+3(b-3)^2+32$$

이때, a, b는 실수이므로

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 값은

$a=1$, $b=3$일 때 최소이다.

$\therefore a+b=4$

15. 세 점 $A(-1,-4)$, $B(3,-3)$, $C(7,1)$ 과 좌표평면 위의 점 P 에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$ 의 최솟값은?

① 46　　② 45　　③ 44　　④ 43　　⑤ 42

해설

점 P 를 $P(x,y)$ 라고 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$

$=\{(x+1)^2+(y+4)^2\}$

$+\{(x-3)^2+(y+3)^2\}$

$+\{(x-7)^2+(y-1)^2\}$

$=x^2+2x+1+y^2+8y+16+x^2-6x+9$

$+y^2+6y+9+x^2-14x+49+y^2-2y+1$

$=3x^2-18x+3y^2+12y+85$

$=3(x^2-6x+9)+3(y^2+4y+4)+46$

$=3(x-3)^2+3(y+2)^2+46$

따라서 $x=3$, $y=-2$ 일 때,

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$ 의 최솟값은 46 이다.

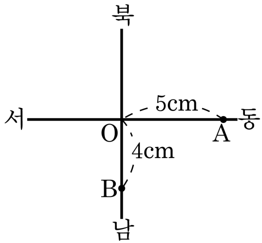
16. $\triangle ABC$의 변 BC의 중점을 M이라 할 때, $\overline{AB}=8$, $\overline{AC}=6$, $\overline{BC}=10$이면 $\overline{AM}$의 길이는?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$이므로
$\triangle ABC$는 직각삼각형이다.
그리고 빗변인 $\overline{BC}$의 중점인 M은 직각삼각형의 외심이다.
$\therefore \ \overline{AM}=\overline{BM}=\overline{CM}=5$

17. 다음의 그림과 같이 수직으로 만나는 도로가 있다. 교차점에서 A는 동쪽으로 5km, B는 남쪽으로 4km의 지점에 있다. A는 시속 4km로 서쪽으로, B는 시속 2km로 북쪽으로 향해서 동시에 출발했을 때, A와 B의 거리가 가장 짧을 때는 몇 시간 후인가?



① 1.4시간 후 ② 1.5시간 후 ③ 1.6시간 후
④ 1.7시간 후 ⑤ 1.8시간 후

해설

남북을 y 축, 동서를 x 축으로 하면 최초의 A, B의 위치의 좌표는 A(5, 0), B(0, -4) 이다. 이 때, t 시간 후의 A, B 의 자표는 A($5-4t$, 0), B(0, $-4+2t$) 로 나타낼 수 있다. 따라서 t 시간 후의 A, B사이의 거리 s 는 $s=\sqrt{\{0-(5-4t)\}^2+(-4+2t-0)^2}$

$=\sqrt{20t^2-56t+41}=\sqrt{20\left(t-\frac{14}{10}\right)^2+\frac{9}{5}}$

s 는 $t=\frac{14}{10}$ 일 때, 최솟값을 갖는다.

18. $\triangle$ABC 의 변 BC, CA, AB 의 중점이 각각 P$(-1,\ a)$, Q$(3,\ 3)$, R$(1,\ 6)$ 이고, 이 삼각형의 무게중심의 좌표가 $\left(b,\ \dfrac{10}{3}\right)$ 일 때, ab 의 값은?

① 1 ② $2\sqrt{5}$ ③ 3 ④ 4 ⑤ $4\sqrt{5}$

해설

$\triangle$ABC 의 무게중심은 $\triangle$PQR 의 무게중심과 일치하게 되므로,

$$\left(\frac{-1+3+1}{3},\ \frac{a+3+6}{3}\right)=\left(b,\ \frac{10}{3}\right)$$

$$b=1,\ \frac{a+9}{3}=\frac{10}{3}$$

$$a=1,\quad b=1\ \therefore\ ab=1$$

19. 두 점 $A(-2,\ 1)$, $B(4,\ -3)$ 에서 같은 거리에 있고 직선 $y=2x-1$ 위에 있는 점 의 좌표는?

① $(-3,\ -7)$ ② $(-2,\ -5)$ ③ $(3,\ 5)$
④ $(2,\ 3)$ ⑤ $(3,\ 2)$

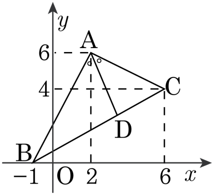
해설

직선 $y=2x-1$ 위에 있는 점을 $P(a,\ b)$라 하면 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$ 에서
$(a+2)^2+(b-1)^2=(a-4)^2+(b+3)^2$
$12a-8b=20$
$\therefore\ 3a-2b=5 \cdots\cdots$ ①
또, 점 P는 $y=2x-1$ 위에 있으므로
$b=2a-1 \cdots\cdots$ ②
①, ②를 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=-7$

해설

두 점으로부터 같은 거리에 있으므로 구하는 점은
$A(-2,1), B(4,-3)$ 의 수직이등분선 위에 있다.
$\overline{AB}$ 의 기울기는 $\dfrac{1+3}{-2-4}=-\dfrac{2}{3}$ 이므로
수직이등분선의 기울기는 $\dfrac{3}{2}$, $A(-2,1), B(4,-3)$ 의 중점 $(1,-1)$
를 지나므로
$\therefore\ y+1=\dfrac{3}{2}(x-1)\ \cdots$ ①
구하는 점 P는 $y=2x-1$과 ①의 교점이다.
연립하여 풀면 $x=-3, y=-7$
$\therefore\ P(-3,\ -7)$

20. 다음 그림과 같이 세 점 A(2, 6), B(−1, 0), C(6, 4)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에서 ∠A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라고 할 때, 점 D의 좌표는?



① $\left(2, \frac{6}{5}\right)$　② $\left(\frac{12}{5}, \frac{8}{5}\right)$　③ $\left(\frac{14}{5}, 2\right)$

④ $\left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}\right)$　⑤ $\left(\frac{18}{5}, \frac{14}{5}\right)$

해설

점 D는 ∠A의 이등분선과 변 BC의 교점이므로

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$ 이다.

$\overline{AB} = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{5}$,

$\overline{AC} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}$ 이므로

$\overline{BD} : \overline{DC} = 3 : 2$

따라서 점 D는 선분 BC를 3 : 2로 내분하는 점이므로

점 D의 좌표는 $\left(\frac{18-2}{3+2}, \frac{12+0}{3+2}\right)$

$\therefore \left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}\right)$