

1. 다음 중 다항함수인 것을 고르면?

① $y = x^2 - 3x + 5$

② $y = \frac{1}{x^2}$

③ $y^2 = x$

④ $\frac{1}{y} = x$

⑤ $xy = 2$

해설

① $y = x^2 - 3x + 5$ 는 x 에 대한 다항식이므로 다항함수이다.

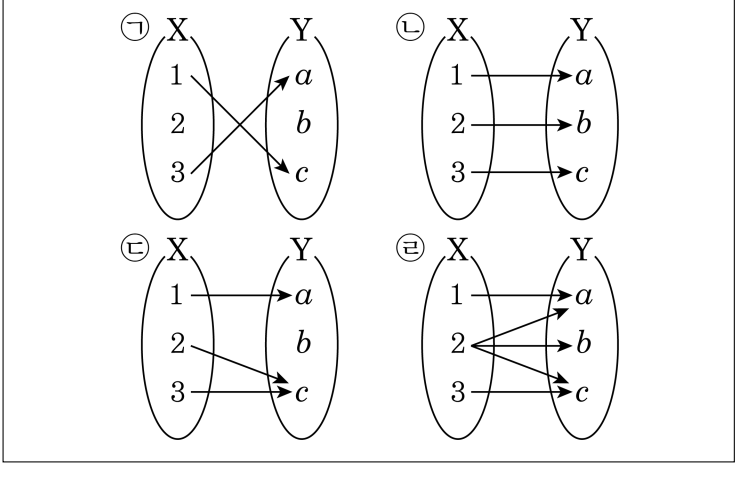
② $y = \frac{1}{x^2}$ 은 x 에 대한 다항식이 아니므로 다항함수가 아니다.

③ $y^2 = x$ 는 $y = \pm \sqrt{x}$ 와 같이 나타내어지고 이 것은 x 에 대한 다항식이 아니므로 다항함수가 아니다.

④ $\frac{1}{y} = x$ 는 $y = \frac{1}{x}$ 과 같이 나타내어지고 이것은 x 에 대한 다항식이 아니므로 다항함수가 아니다.

⑤ $xy = 2$ 는 $y = \frac{2}{x}$ 과 같이 나타내어지고 이것은 x 에 대한 다항식이 아니다.

2. 다음 대응 관계 중 X 에서 Y 로의 함수인 것을 모두 고른 것은?



- ① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉡, ㉣
④ ㉠, ㉢, ㉣ ⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ X 의 원소 2에 대응하는 Y 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.
㉡, ㉢ X 의 각 원소에 Y 의 원소가 하나씩만 대응하므로 함수이다.
㉣ X 의 원소 2에 대응하는 Y 의 원소가 a , b , c 의 3개이므로 함수가 아니다.

3. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3\}$ 에 대하여 다음 중 X 에서 Y 로의 함수인 것은?
- ① $f : x \rightarrow x$

② $f : x \rightarrow -2|x|$

③ $f : x \rightarrow x^2$

④ $f : x \rightarrow x + 3$

⑤ $f : x \rightarrow |3x| + 1$

해설

③ $y = f(x) = x^2$ 에서
 $f(-1) = (-1)^2 = 1 \in Y$, $f(0) = 0^2 = 0 \in Y$, $f(1) = 1^2 = 1 \in Y$
따라서 함수이다.

4. 함수 f 가 임의의 양의 실수 x, y 에 대하여 $f(xy) = f(x) + f(y)$, $f(2) = 1$ 일 때, $f(8) + f\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값은 얼마인가?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned} f(8) &= f(4 \cdot 2) = f(4) + f(2) \\ &= f(2 \cdot 2) + f(2) \\ &= f(2) + f(2) + f(2) \\ &= 3f(2) = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2) &= f\left(4 \cdot \frac{1}{2}\right) \\ &= f(4) + f\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= f(2 \cdot 2) + f\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= f(2) + f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = -f(2) = -1$$

$$\text{따라서 } f(8) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 + (-1) = 2$$

5. 함수 $f(x)$ 는 임의의 두 실수 a, b 에 대하여 $f(a+b) = f(a) + f(b)$ 를 만족시킨다. 이러한 함수를 다음에서 고르면?

① $f(x) = |x|$

② $f(x) = -x^2$

③ $f(x) = 3x$

④ $f(x) = 2x + 3$

⑤ $f(x) = x^3 + 3x$

해설

① $f(a+b) = |a+b|$

$f(a) + f(b) = |a| + |b|$

이 때 $|a+b| \leq |a| + |b|$

② $f(a+b) = -(a+b)^2 = -a^2 - 2ab - b^2$

$f(a) + f(b) = -a^2 - b^2$

③ $f(a+b) = 3(a+b) = 3a + 3b = f(a) + f(b)$

④ $f(a+b) = 2(a+b) + 3$

$f(a) + f(b) = 2a + 3 + 2b + 3 = 2(a+b) + 6$

⑤ $f(a+b) = (a+b)^3 + 3(a+b)$

$= (a+b)(a^2 + 2ab + b^2 + 3)$

$f(a) + f(b) = a^3 + 3a + b^3 + 3b$

$= a^3 + b^3 + 3(a+b)$

$= (a+b)(a^2 - ab + b^2 + 3)$

6. 모든 양수 m, n 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 항상 $f(mn) = f(m) + f(n)$ 만족한다.

$f(2) = a, f(3) = b$ 일 때 $f(24)$ 를 a, b 를 써서 나타내면?

① $a + 2b$

② $2a + b$

③ $2a + 3b$

④ $3a + b$

⑤ $3a + 2b$

해설

$$f(24) = f(2^3 \cdot 3) = f(2^3) + f(3)$$

$$f(2^3) = f(2^2 \cdot 2) = f(2^2) + f(2)$$

$$= \{f(2) + f(2)\} + f(2) = 3f(2)$$

$$\text{따라서 } 3f(2) + f(3) = 3a + b$$

7. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족시킬 때, $f(1280)$ 의 값은 얼마인가?

(i) $f(2x) = f(x) \ (x = 1, 2, 3, \dots)$

(ii) $f(2x + 1) = 2^x \ (x = 0, 1, 2, 3, \dots)$

- ① 2
- ② 4
- ③ 8
- ④ 16
- ⑤ 32

해설

$$1280 = 2^8 \cdot 5 \text{ 이므로,}$$
$$f(2^8 \cdot 5) = f(2^7 \cdot 5) = f(2^6 \cdot 5) = \dots = f(5)$$
$$= f(2 \cdot 2 + 1) \text{ 이므로,}$$
$$f(2 \cdot 2 + 1) = 2^2 = 4$$

8. $f : X \rightarrow Y$, $x \rightarrow f(x)$ 라 한다. X 의 임의의 두 원소를 a, b 라 할 때, 다음 중에서 f 가 일대일 함수일 조건은?
- ① $a = b$ 이면 $f(a) = f(b)$ ② $f(a) = f(b)$ 이면 $a = b$
③ $f(a) \neq f(b)$ 이면 $a \neq b$ ④ $a \neq b$ 이면 $f(a) = f(b)$
⑤ $a = b$ 이면 $f(a) \neq f(b)$

해설

일대일함수의 정의
「 $a \neq b$ 이면, $f(a) \neq f(b)$ 」의 대우

9. 자연수의 집합을 N , 양의 유리수 집합을 Q^+ 라고 할 때, 함수 f 가 $f : Q^+ \rightarrow N \times N$ 으로 정의될 때, 다음 중 일대일 대응인 것은? (단, p, q 는 서로소)

① $f\left(\frac{p}{q}\right) = (p, 0)$

② $f\left(\frac{p}{q}\right) = (0, q)$

③ $f\left(\frac{p}{q}\right) = (p+q, 0)$

④ $f\left(\frac{p}{q}\right) = (0, pq)$

⑤ $f\left(\frac{p}{q}\right) = (p, q)$

해설

① $\frac{2}{3} \neq \frac{2}{5}$ 일 때

$f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{2}{5}\right) = (2, 0)$

②, ③, ④도 같은 방법으로

일대일 대응이 아님을 보일 수 있다.

10. 항등함수와 상수함수에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것을 모두 고르면?(단, R 는 실수 전체의 집합이다.)
- ① 항등함수는 일대일 대응이다.
 - ② $f: R \rightarrow R$ 가 항등함수이면 $f(x) = x$ 이다.
 - ③ 항등함수를 그래프로 나타내면 항상 직선 $y = x$ 가 된다.
 - ④ 집합 R 에서 R 로의 상수함수는 오직 하나뿐이다.
 - ⑤ 상수함수를 그래프로 나타내면 항상 직선이 된다.

해설

- ③ 정의역과 공역이 실수 전체의 집합일 경우에만 항등함수의 그래프가 직선 $y = x$ 이다.
(반례) $f: X \rightarrow Y, f(x) = x$ 에서
 $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{1, 2, 3\}$ 이면
 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 가 아니다.
 - ④ 집합 R 에서 R 로의 상수함수는 무수히 많다.
 - ⑤ 정의역이 실수 전체의 집합일 경우에만 상수함수의 그래프가 직선이 된다.
(반례) $f: X \rightarrow Y, f(x) = 3$ 에서
 $X = \{1, 2, 3\}$ 이면 $y = f(x)$ 는 직선이 아니다.
- 따라서, 옳지 않은 것은 ③, ④, ⑤이다.

11. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로 대응되는 함수의 개수를 a , 일대일 대응의 개수를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 64$

해설

정의역과 공역의 개수가 다르므로
일대일 대응은 없고, 정의역의 개수가 A
공역의 개수가 B 일 때 함수 개수는 B^A 이다.
 $\therefore 4^3 = 64$
 $\therefore a + b = 64$

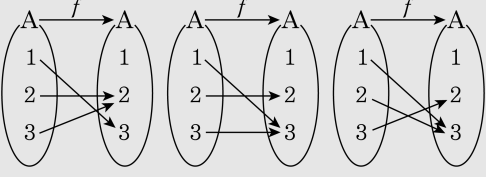
12. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족시키는 함수 $f : A \rightarrow A$ 의 개수는 몇 개인가?

- I. $f(1) = 3$
II. $x \in A$ 에 대하여 $f(x)$ 의 최솟값은 2 이다.

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

두 조건을 만족시키기 위해서는
 $f(2) = 2$ 또는 $f(3) = 2$ 를 만족시키고
 $f(2), f(3)$ 의 값이 동시에
3 이 되어서는 안되며 어떤 원소도
1 에 대응해서는 안된다.
따라서, 함수 f 의 대응은 다음과 같다.



13. 함수 $f(x) = x + 1$ 라 할 때, $f^{10}(2)$ 의 값을 구하여라. (단, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f^{n-1} \circ f$)

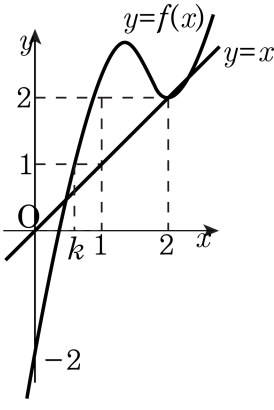
▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$\begin{aligned} f^2(x) &= (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x+1) \\ &= (x+1) + 1 = x+2 \\ f^3(x) &= (f^2 \circ f)(x) = f^2(f(x)) = f^2(x+1) \\ &= (x+1) + 2 = x+3 \\ f^4(x) &= (f^3 \circ f)(x) = f^3(f(x)) = f^3(x+1) \\ &= (x+1) + 3 = x+4 \\ &\quad \dots \\ f^n(x) &= x+n \\ \therefore f^{10}(2) &= 2+10 = 12 \end{aligned}$$

14. 다음 그림과 같이 함수 $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 2$ 에서 $f(k) = 1$ 일 때, $f^{10}(k)$ 의 값은?(단, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f^2 \circ f$, $f^n = f^{n-1} \circ f$)



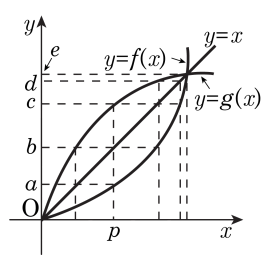
- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 5 ⑤ 11

해설

$$\begin{aligned} f(k) &= 1 \\ f^2(k) &= f(f(k)) = f(1) = 2 \\ f^3(k) &= f^2 \circ f(k) = f^2(f(k)) = f^2(1) \\ &= f(f(1)) = f(2) = 2 \\ &\vdots \\ f^{10}(k) &= 2 \end{aligned}$$

15. 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, $(f \circ g)(p)$ 의 값은 얼마인가? (단, 점선은 x 축 또는 y 축에 평행하다.)

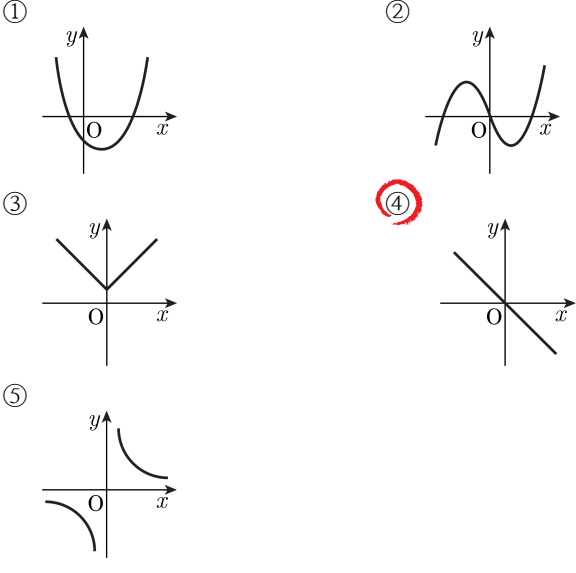
- ① a ② b ③ c
 ④ d ⑤ e



해설

주어진 그림에서 $g(p) = c, f(c) = b$
 $\therefore (f \circ g)(p) = f(g(p)) = f(c) = b$

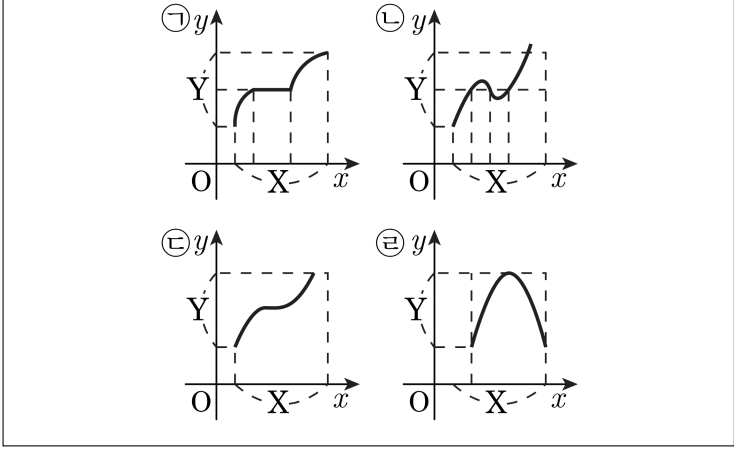
16. 다음 그래프 중에서 실수전체 집합에서 역함수가 존재하는 함수의 그래프는?



해설

역함수가 존재하려면 함수가 일대일 대응이어야 한다.
일대일 대응이란 변수 x, y 가 서로 하나씩 대응되는 것으로 ④에 해당된다.
⑤번은 $x = 0$ 에 대응되는 y 가 없다.

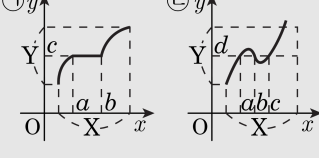
17. 함수 $f: X \rightarrow Y$ 의 그래프가 다음과 같다고 한다. 이 중에서 역함수가 존재하는 것은?



- ① ㉠, ㉢
 ② ㉡, ㉣
 ③ ㉢
- ④ ㉠
 ⑤ ㉠, ㉡, ㉣

해설

X 에서 Y 로의 일대일대응을 찾으면 된다.



- ㉠ : $\{x|a \leq x \leq b\}$ 에 속하는 x 의 상이 모두 c 이므로 일대일대응이 아니다.
- ㉡ : a, b, c 의 상이 모두 d 이므로 일대일 대응이 아니다.
- ㉢ : ㉡의 경우와 같다.

18. 함수 $f(x) = ax + b (a > 0)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 이 함수 $f(x)$ 와 같을 때, 상수 a, b 의 값을 구하면?

① $a = 1, b = 0$ ② $a = 1, b = 1$ ③ $a = 2, b = 0$

④ $a = 2, b = 1$ ⑤ $a = 3, b = 0$

해설

$$f^{-1}(x) = f(x) \text{ 에서 } f(f(x)) = x$$

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= af(x) + b \\ &= a(ax + b) + b \\ &= a^2x + ab + b \end{aligned}$$

$$a^2x + ab + b = x$$

$$\therefore a^2 = 1, ab + b = 0$$

$$\therefore a = 1, b = 0$$

19. 함수 $f(x) = 2ax - a + 2$ 에 대하여 $f^{-1}(-7) = 2$ 일 때, 상수 a 의 값은 얼마인가?

① -5

② -3

③ -1

④ 1

⑤ 3

해설

$f^{-1}(-7) = 2$ 이므로

역함수의 정의에 의해서

$$f(2) = -7, f(2) = 2a \times 2 - a + 2 = -7, 3a = -9$$

$$\therefore a = -3$$

20. 두 함수 f, g 가 $f(2) = 3, g^{-1}(1) = 4$ 일 때, $f^{-1}(3) + g(4)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(2) = 3$ 에서 $f^{-1}(3) = 2$ 이고
 $g^{-1}(1) = 4$ 에서 $g(4) = 1$ 이므로
 $f^{-1}(3) + g(4) = 2 + 1 = 3$

21. 유한집합 X 에서 유한집합 Y 로의 함수 f 의 역함수 f^{-1} 가 존재한다고 한다. 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

① $n(X) = n(Y)$ 이다.

② $x_1 = x_2$ 이면 $f(x_1) = f(x_2)$

③ $f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2)$ 이면 $x_1 = x_2$ 이다.

④ $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = -x$ 에 대하여 대칭이다.

⑤ $f(a) = b$ 이면 $f^{-1}(b) = a$ 이다.

해설

①, ②, ③, ⑤ : 역함수를 갖기 위해서는 일대일 대응이 어야 한다.

④ : $y = x$ 에 대해 대칭관계이다.

22. 양의 실수에서 정의된 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & (x \geq 1) \\ \frac{1}{x} + 1 & (0 < x < 1) \end{cases} \quad \text{일 때, } (f \circ f \circ f)(a) = 5 \text{ 를 만족하는}$$

상수 a 의 값을 구하면?

- ① -3 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$(f \circ f \circ f)(a) = 5$ 에서 $f(f(f(a))) = 5$ 이므로

$f(f(a)) = f^{-1}(5) = k_1$ 이라 하면 $f(k_1) = 5$

$5 > 1$ 이므로 $0 < k_1 < 1$, $\frac{1}{k_1} + 1 = 5$

$$\therefore k_1 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore f(f(a)) = \frac{1}{4}$$

$$f(a) = f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = k_2 \text{라 하면 } f(k_2) = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} < 1 \text{ 이므로 } k_2 \geq 1, \frac{1}{k_2+1} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore k_2 = 3$$

$f(a) = 3$ 에서 $3 \geq 1$ 이므로 $0 < a < 1$

$$\therefore \frac{1}{a} + 1 = 3, a = \frac{1}{2}$$

23. 함수 $y = |2x - 4| - 4$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

절대값 기호 안을 0으로 하는 x 의 값은

$2x - 4 = 0$ 에서 $x = 2$

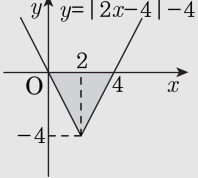
(i) $x < 2$ 일 때, $y = -(2x - 4) - 4 = -2x$

(ii) $x \geq 2$ 일 때, $y = (2x - 4) - 4 = 2x - 8$

따라서 (i), (ii)에 의하여

함수 $y = |2x - 4| - 4$ 의 그래프는 그림과 같으므로

구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$



24. $\frac{1}{a(a+1)} + \frac{2}{(a+1)(a+3)} + \frac{3}{(a+3)(a+6)}$ 을 간단히 한 것은 ?

① $\frac{1}{a} + \frac{6}{a+6}$

② $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+6}$

③ $\frac{1}{a} - \frac{1}{a+6}$

④ $\frac{1}{a} - \frac{6}{a+6}$

⑤ $\frac{2}{a} - \frac{1}{a+6}$

해설

(준식)

$$= \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+3} + \frac{1}{a+3} - \frac{1}{a+6}$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{1}{a+6}$$

25. 다음 식을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}} = 10$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -9

해설

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}} &= \frac{1}{1 - \frac{x}{x-1}} = \frac{x-1}{x-1-x} = 1-x \\ 1-x &= 10 \\ \therefore x &= -9\end{aligned}$$

26. $x^2 - 5x + 1 = 0$ 일 때, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 23

해설

$x^2 - 5x + 1 = 0$ 에서 양변을 x 로 나눈다.

$$x + \frac{1}{x} - 5 = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = 5$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 25 - 2 = 23$$

27. 곡선 $xy + x - 3y - 2 = 0$ 이 지나지 않는 사분면을 구하면?

- ① 제 1 사분면 ② 제 2 사분면 ③ 제 3 사분면
④ 제 4 사분면 ⑤ 없다.

해설

$xy + x - 3y - 2 = 0$ 을 y 에 대하여
정리하면 $(x - 3)y = -x + 2$

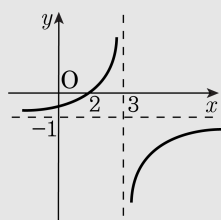
$$\therefore y = \frac{-x + 2}{x - 3} = \frac{-1}{x - 3} - 1 (x \neq 3)$$

즉, $y = \frac{-1}{x - 3} - 1$ 은 점근선이

$x = 3$, $y = -1$ 이고 점 $(2, 0)$ 을 지나므로

그래프는 다음 그림과 같다. 따라서,

제 2 사분면을 지나지 않는다.



28. 함수 $y = \frac{k}{x-1} + 3$ ($k \neq 0$) 의 그래프에 대한 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

- ㉠ $k > 0$ 이면 제 1 사분면과 제 3 사분면을 지난다.
- ㉡ $k < 0$ 이면 제 1, 2, 4 사분면을 지난다.
- ㉢ $k > 3$ 이면 모든 사분면을 지난다.

- ① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉢
- ④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

점근선은 $x = 1, y = 3$ 이다.
㉠, ㉢ : $0 < k \leq 3$ 이면, 제 1, 2, 4 사분면을 지난다.
 $k > 3$ 이면 모든 사분면을 지난다.
㉡ : $k < 0$ 이면, 제 1, 2, 4 사분면을 지난다.
 $\therefore$ ㉡, ㉢ 이 참.

29. 두 함수의 그래프 $y = x - 1, y = -\frac{1}{2}x + 2$ 의 교점 (p, q) 에 대해 대칭인 유리함수 $y = \frac{cx + d}{ax + b}$ 가 원점을 지난다고 할 때, $a + b + c + d$ 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$y = x - 1$ 과 $y = -\frac{1}{2}x + 2$ 의 교점은
 $x - 1 = -\frac{1}{2}x + 2, 2x - 2 = -x + 4$
 $\therefore x = 2, y = 1 \quad \therefore (p, q) = (2, 1)$
이 때, $(2, 1)$ 에 대해 대칭인 유리함수는
 $y = \frac{k}{x - 2} + 1$ 이고 원점을 지나므로
 $0 = \frac{k}{-2} + 1$
 $\therefore k = 2$
 $y = \frac{2}{x - 2} + 1 = \frac{2 + x - 2}{x - 2} = \frac{x}{x - 2}$
 $= \frac{cx + d}{ax + b}$
 $\therefore a = 1, b = -2, c = 1, d = 0$
 $\therefore a + b + c + d = 0$

30. 분수함수 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ 가 있다. 이 함수의 그래프가 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이기 위한 필요충분조건은?

- ① $a - d = 0$ ② $a + d = 0$ ③ $ad = 1$
④ $ad = -1$ ⑤ $ad - bc = 0$

해설

$$\begin{aligned} y = \frac{ax+b}{cx+d} &= \frac{\frac{a}{c}(cx+b) - \frac{ab}{c} + b}{cx+d} \\ &= \frac{\frac{b}{c}(c-a)}{cx+d} + \frac{a}{c} = \frac{b(c-a)}{c(cx+d)} + \frac{a}{c} \end{aligned}$$

주어진 분수함수의 점근선은

$$x = -\frac{d}{c}, y = \frac{a}{c} \text{ 이므로}$$

그래프는 점 $\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$ 에 대하여 대칭이다. 이때, 이 분수함수의

그래프가 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 점 $\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$ 은 직선

$y = x$ 위에 있다.

$$\therefore \frac{a}{c} = -\frac{d}{c}, a = -d$$

$$\therefore a + d = 0$$

31. 함수 $y = \frac{2x+3}{x+4}$ 의 그래프는 점 (p, q) 에 대하여 대칭이고, 동시에 $y = x + r$ 에 대하여 대칭이다. 이때, $p + q + r$ 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$$y = \frac{2x+3}{x+4} = \frac{2(x+4)-5}{x+4} = \frac{-5}{x+4} + 2$$

따라서 $y = \frac{2x+3}{x+4}$ 의 그래프는 점 $(-4, 2)$ 에 대하여 대칭이고,
점 $(-4, 2)$ 를 지나고

기울기가 1 인 직선 $y = x + 6$ 에 대하여 대칭이다.

$$\therefore p = -4, \quad q = 2, \quad r = 6$$

$$\therefore p + q + r = -4 + 2 + 6 = 4$$

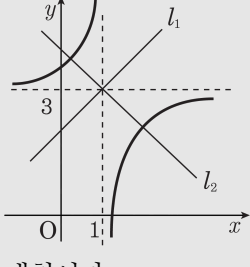
32. 함수 $y = \frac{3x-5}{x-1}$ 의 그래프가 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭일 때, ab 의 값들을 모두 구하면?

- ① 2, -4
- ② -2, 4
- ③ 2, 4
- ④ -2, -4
- ⑤ 3, 5

해설

$$y = \frac{3x-5}{x-1} = \frac{3(x-1)-2}{x-1} = \frac{-2}{x-1} + 3$$

따라서 위의 그림과 같이 직선 l_1, l_2 에 대하여



대칭이다.

$$l_1 : y - 3 = 1 \cdot (x - 1) \therefore y = x + 2$$

$$l_2 : y - 3 = -1 \cdot (x - 1) \therefore y = -x + 4$$

따라서 $ab = 2$ 또는 $ab = -4$

33. $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ 을 계산하면 $a+b\sqrt{c}$ 가 된다. 이때, $a+b+c$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = 5-2\sqrt{6}$$

$$a=5, b=-2, c=6$$

$$\therefore a+b+c=9$$

34. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ 일 때, $\frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \cdots + \frac{1}{f(99)}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ 이므로

$$\frac{1}{f(x)} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{준 식}) &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \\ &\quad (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{100} - \sqrt{99}) \\ &= \sqrt{100} - 1 = 10 - 1 = 9 \end{aligned}$$

35. $3 - \sqrt{2}$ 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라 할 때, $a + \frac{2}{b}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $3 + \sqrt{2}$

해설

$1 < \sqrt{2} < 2$ 이므로 $a = 1, b = 2 - \sqrt{2}$

$$\begin{aligned}\text{따라서 } a + \frac{2}{b} &= 1 + \frac{2}{2 - \sqrt{2}} \\ &= 1 + \frac{2(2 + \sqrt{2})}{2} \\ &= 3 + \sqrt{2}\end{aligned}$$

36. $3 + \sqrt{8}$ 의 소수 부분을 x 라 할 때, $\sqrt{x^2 + 4x}$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

(1) 단계

$2 < \sqrt{8} < 3$ 이므로

$3 + \sqrt{8} - 2 + 2 = 5 + \sqrt{8} - 2$ 에서

소수 부분 $x = \sqrt{8} - 2$

(2) 단계

$x + 2 = \sqrt{8}$

(양변을 제곱하면) $x^2 + 4x + 4 = 8$,

$x^2 + 4x = 4$ 를 대입하면

(준식) $= \sqrt{4} = 2$

37. $x = \sqrt{2} + 1$, $y = \sqrt{2} - 1$ 일 때,

$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ 의 값은?

① 1

② $\sqrt{2}$

③ 2

④ $2\sqrt{2}$

⑤ $\sqrt{3}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \\ &= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{x - y} \\ &= \frac{x + y - 2\sqrt{xy} + x + y + 2\sqrt{xy}}{x - y} = \frac{2(x + y)}{x - y} \\ & \begin{cases} x + y = \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1 = 2\sqrt{2} \\ x - y = \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} + 1 = 2 \end{cases} \\ & \therefore \frac{2(x + y)}{x - y} = \frac{2 \times 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

38. $x = 2 + \sqrt{3}$, $y = 2 - \sqrt{3}$ 일 때, $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ 의 값은?

① 14

② 16

③ 18

④ 20

⑤ 22

해설

$x = 2 + \sqrt{3}$, $y = 2 - \sqrt{3}$ 일 때,

$xy = 4 - 3 = 1$, $x + y = 4$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{14}{1} = 14$$

$$(\therefore x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy)$$

39. $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, $y = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ 일 때, 다음 식의 값은?

$$\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{y}\right)^3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

- ① $3(\sqrt{3} + \sqrt{2})$

② $3(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

③ 9
- ④ $5(\sqrt{3} + \sqrt{2})$

⑤ $7(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

해설

$$\begin{aligned} \text{(주어진 식)} &= \frac{\frac{x^3 + y^3}{(xy)^3}}{\frac{x + y}{xy}} \\ &= \frac{(x + y)^3 - 3xy(x + y)}{(x + y)(xy)^2} \\ &= \frac{(x + y)^2 - 3xy}{(xy)^2} \end{aligned}$$

$$\text{조건에서 } x + y = 2\sqrt{3}, \quad xy = 1$$

$$\therefore \text{(주어진 식)} = \frac{(2\sqrt{3})^2 - 3 \cdot 1^2}{1} = 9$$

40. $x = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$, $y = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$ 일 때, $x^3 + y^3$ 의 값은?

- ① $8\sqrt{3}$ ② $24\sqrt{3}$ ③ $30\sqrt{3}$ ④ 48 ⑤ 52

해설

$$x = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3},$$

$$y = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

$$x + y = 4, \quad xy = 1$$

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x + y)^3 - 3xy(x + y) \\ &= 4^3 - 3 \times 4 = 52 \end{aligned}$$

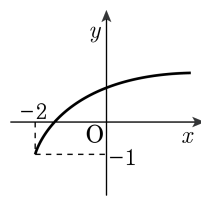
41. $0 < a < 1$ 이고 $x = a - \frac{1}{a}$ 일 때, $\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2}$ 를 a 로 나타내면?

- ① $2a$ ② $\frac{2}{a}$ ③ $-\frac{2}{a}$ ④ $-2a$ ⑤ 0

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2} &= \sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 4} - \sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2} - \left|a - \frac{1}{a}\right| \\ &= \left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(a - \frac{1}{a}\right) = 2a\end{aligned}$$

42. 다음 그래프는 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를 평행 이동한 것이다. 이 그래프의 함수는?

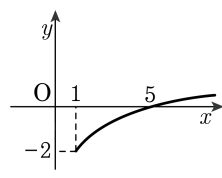


- ① $y = \sqrt{x-2} + 1$
② $y = \sqrt{x-2} - 1$
③ $y = \sqrt{x+2} + 1$
④ $y = \sqrt{x+2} - 1$
⑤ $y = -\sqrt{x-2} - 1$

해설

x 축으로 -2 만큼
 y 축으로 -1 만큼 평행이동했으므로
 x 대신 $x+2$, y 대신 $y+1$ 을 대입하면
 $y = \sqrt{x+2} - 1$

43. 다음 그림은 무리함수 $y = \sqrt{ax+b} + c$ 의 그래프를 그린 것이다. 이 때, 상수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c$ 의 값은?



- ① 1 ② -1 ③ 2
 ④ -2 ⑤ 3

해설

$y = \sqrt{a\left(x + \frac{b}{a}\right)} + c$ 의 그래프를 보면

점(1, -2)에서부터 시작하므로

$$-\frac{b}{a} = 1, c = -2$$

$$\therefore -b = a, c = -2$$

$y = \sqrt{ax-a} - 2$ 가 점(5, 0)을 지나므로

$$0 = \sqrt{5a-a} - 2, 2 = \sqrt{4a}$$

양변을 제곱하면 $4 = 4a$

$$\therefore a = 1$$

따라서 $a = 1, b = -1, c = -2$ 이므로

$$a + b + c = 1 - 1 - 2 = -2$$

44. 1부터 72까지의 자연수 중에서 72와 서로소인 수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 24 개

해설

$$72 = 2^3 \times 3^2$$

72와 서로소는 2의 배수도 아니고, 3의 배수도 아닌 것

$$\therefore 72 - (36 + 24 - 12) = 24$$

$$\therefore 24 \text{ 개}$$

45. 540의 양의 약수의 총합을 구하여라.

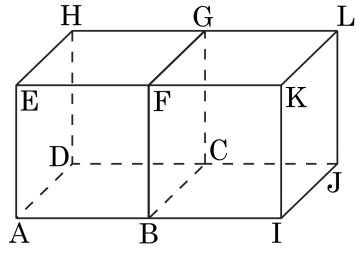
▶ 답 :

▷ 정답 : 1680

해설

$$\begin{aligned} & (1 + 2 + 2^2)(1 + 3 + 3^2 + 3^3)(1 + 5) \\ & = 7 \times 40 \times 6 = 1680 \end{aligned}$$

46. 두 개의 정육면체가 서로 붙어 있는 아래 그림에서 A 에서부터 L 까지 모서리를 따라 최단 거리로 가는 방법 중 B 를 통과하지 않는 방법의 수를 구하면?



- ① 4
- ② 6
- ③ 8
- ④ 12
- ⑤ 16

해설

A

D

E

C

F

J—L

G—L

H—G—L

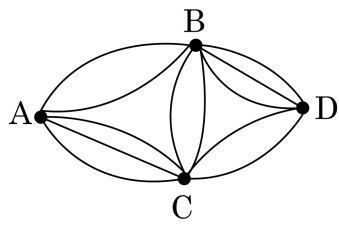
K—L

G—L

H—G—L

위의 수형도에서 구하는 방법의 수는 6 가지이다.

47. A, B, C, D 네 지점 사이에 오른쪽그림과 같은 도로망이 있다. A 에서 D 까지의 경로는 모두 몇 가지인가? (단, 동일 지점은 많아야 한번만 지난다.)



▶ 답: 가지

▶ 정답 : 38가지

해설

A 에서 D 까지의 경로는

$A \rightarrow B \rightarrow D$ 의 경우 : $2 \times 3 = 6$ (가지)

$A \rightarrow C \rightarrow D$ 의 경우: $3 \times 2 = 6$ (가지)

$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ 의 경우 :

$$2 \times 2 \times 2 = 8 \text{ (가지)}$$

$A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D$ 의 경우 :

$$3 \times 2 \times 3 = 18 \text{ (가지)}$$

따라서 구하는 가지수는

$$6 + 6 + 8 + 18 = 38 \text{ (가지)}$$

48. 100원짜리, 50원짜리, 10원짜리 세 종류의 동전으로 200원을 지불할 수 있는 경우의 수는 몇 가지인가? (모든 종류의 동전을 사용할 필요는 없다.)

- ① 6
- ② 7
- ③ 8
- ④ 9
- ⑤ 10

해설

(100원짜리, 50원짜리, 10원짜리) 각각의 순서쌍을 구하면
(2, 0, 0), (1, 2, 0), (1, 1, 5), (1, 0, 10), (0, 4, 0), (0, 3, 5), (0, 2, 10),
(0, 1, 15), (0, 0, 20)
∴ 9가지

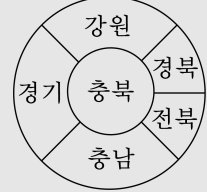
49. 다음 그림은 우리나라 지도의 일부분이다. 6 개의 도를 서로 다른 4 가지의 색연필로 칠을 하여 도(圖)를 구분하고자 한다. 색칠을 하는 방법의 가지 수를 구하면?



- ① 32 가지 ② 56 가지 ③ 72 가지
④ 96 가지 ⑤ 118 가지

해설

위 지도를 다음 그림과 같이 생각하면,



충북에 색칠하는 방법의 수는 4 (가지)
충남에 색칠하는 방법의 수는 3 (가지)
전북에 색칠하는 방법의 수는 2 (가지)
경기에 색칠하는 방법의 수는 2 (가지)
경북에 색칠하는 방법의 수는 2 (가지)
강원에 색칠하는 방법의 수는 1 (가지)
그러므로 $4 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 = 96$
∴ 96 가지

50. 1, 2, 3 으로 만들 수 있는 세 자리의 자연수는 27 개가 있다. 이 중에서 다음 규칙을 만족시키는 세 자리의 자연수의 개수를 구하여라.
- (가) 1 바로 다음에는 3 이다.
- (나) 2 바로 다음에는 1 또는 3 이다.
- (다) 3 바로 다음에는 1, 2 또는 3 이다.

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 13가지

해설

조건에 맞는 세 자리수는 131, 132, 133, 213, 231, 232, 233, 313, 321, 323, 331, 332 ,333 이므로 13 가지이다.

51. 다항식 $(a+b+c)(p+q+r)-(a+b)(s+t)$ 를 전개하였을 때 항의 개수는?

① 5

② 7

③ 9

④ 11

⑤ 13

해설

$(a+b+c)(p+q+r)$ 의 전개식의 항의 개수는

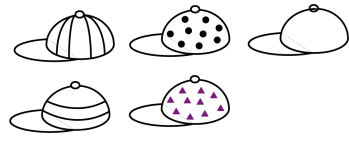
$$3 \times 3 = 9$$

$(a+b)(s+t)$ 의 전개식의 항의 개수는

$$2 \times 2 = 4$$

따라서 구하는 항의 개수는 $9 + 4 = 13$ 이다.

52. 5명이 자기 모자를 벗어 섞은 후 다시 무심코 1개를 집을 때 한 사람만이 자신의 모자를 가지게 되는 경우의 수는?



- ① 33
- ② 36
- ③ 40
- ④ 45
- ⑤ 54

해설

n 명이 전부 다른 사람의 모자를 집어 드는 경우의 수를 F_n 이라고 하면

$F_n=(n-1)(F_{n-1}+F_{n-2})(n\geq 3),$

$F_0=0, F_1=1$ 이므로

$F_3=2, F_4=9$

따라서 구하는 경우의 수는

$5F_4=5\times 9=45$

53. 남자 4 명, 여자 3 명을 일렬로 세울 때, 여자 3 명이 이웃하여 서는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 720 가지

해설

여자 3 명을 한 묶음으로 본다.

$$5! \times 3! = 720$$

54. A, B, C, D, E 다섯 명의 학생이 있다. 항상 D가 C보다 앞에 오도록 일렬로 서는 방법의 수는 ?

① 12

② 20

③ 24

④ 30

⑤ 60

해설

전체를 줄세운 다음 C, D가 순서를 바꾸어 서는 경우로 나누어 주면 된다.

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

55. 0, 1, 2, 3, 4, 5 의 6 개의 숫자를 한번씩 사용하여 네 자리의 정수를 만들 때, 양 끝이 홀수인 자연수의 개수를 구하면?

▶ 답 : 72 개

▷ 정답 : 72개

해설

양 끝이 홀수이므로 1, 3, 5 중 2 개를 배열하는 경우의 수는 ${}_3P_2 = 6$
두 홀수를 제외한 나머지 4 개의 숫자를 배열하는 경우의 수는 ${}_4P_2 = 12$
따라서 $6 \times 12 = 72$

56. 그림과 같은 직사각형의 틀에 숫자 1, 1, 2, 3을 제 1행의 각 칸에 1개씩 나열하고 제 2행에도 숫자 1, 1, 2, 3을 각 칸에 1개씩 나열할 때, 같은 열에는 같은 숫자가 들어가지 않게 나열하는 경우의 수는?

1행				
2행				

- ① 15
- ② 18
- ③ 20
- ④ 22
- ⑤ 24

해설

숫자 1, 1, 2, 3을 같은 열에는 같은 숫자가 들어가지 않게 나열하는 방법의 수는 (1 2), (1 3), (2 1), (3 1)을 일렬로 나열하는 방법의 수와 일치하므로 $4! = 24$

57. 1 부터 9 까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 아홉 장의 카드가 있다. 이 중 4 장의 카드를 뽑아 갑에게 2 장, 을에게 2 장을 주었을 때, 뽑힌 4 장 중 제일 작은 수가 적힌 카드가 갑에게 있을 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 378 가지

해설

9장 중 4장의 카드를 뽑는 방법의 수는

$${}_9C_4 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$$

뽑힌 4장의 카드 중 제일 작은 수의 카드는 갑에게 주고, 나머지 3장 중 1장의 카드만 갑에게 주면 나머지 2장은 을에게 간다.

$$\therefore {}_9C_4 \cdot {}_3C_1 = 378$$

58. $X = \{1, 2, 3\}$ 에서 $Y = \{a, b, c, d, e\}$ 로 대응되는 함수 중 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$ 인 함수의 개수를 구하여라.

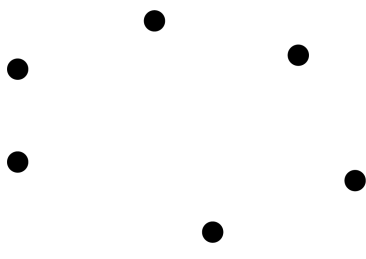
▶ 답 : 개

▷ 정답 : 10 개

해설

Y 의 원소 5개 중 X 의 원소 1, 2, 3에 대응될 원소 3개를 뽑으면 된다.
 ${}_5C_3 = 10$

59. 다음 그림과 같이 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않은 서로 다른 6개의 점에 대하여 만들어지는 직선의 개수를 구하여라.



▶ 답 : 6 개

▷ 정답 : 15개

해설

두 점을 이어서 만들 수 있는 직선의 개수는

$${}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15 \text{ (개)}$$

60. 크기와 모양이 다른 9 개의 구슬을 4 개, 3 개, 2 개로 나누어 3 명의 어린이에게 나누어 주는 방법의 수는?

- ① 7480 ② 7520 ③ 7560 ④ 7600 ⑤ 7640

해설

$${}_9C_4 \times {}_5C_3 \times {}_2C_2 \times 3! = 7560$$

61. 서로 다른 9 개의 사탕이 있을 때, 사탕을 3 개씩 세 묶음으로 나누어 갑, 을, 병에게 나누어 주는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 1680 가지

해설

$${}_9C_3 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{3!} \times 3! = 1680$$

- 62.** 서로 다른 과일 6 개에 대하여 과일을 1 개, 2 개, 3 개로 나누어 세 학생에게 나누어 주는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답: 가지

▶ 정답 : 360가지

해설

나눈 후 배열하는 방법까지 고려한다.

$$\Rightarrow_6 C_1 \times_5 C_2 \times_3 C_3 \times 3! = 360$$

63. 서로 다른 15 종류의 꽃이 있다. 5개씩 세 사람에게 나누어 주는 방법은 몇 가지인가?
- ① ${}_{15}C_5 \times {}_{10}C_5 \times {}_5C_5$
 - ② ${}_{15}C_5 \times {}_{10}C_5 \times {}_5C_5 \times \frac{1}{3!}$
 - ③ ${}_{15}C_5 \times {}_{10}C_5 \times {}_5C_5 \times 3!$
 - ④ ${}_{15}C_5 \times {}_{10}C_5 \times {}_5C_5 \times \frac{1}{3!} \times 3!$
 - ⑤ ${}_{15}C_5 \times {}_{10}C_5$

해설

5개씩 3 뭉치로 나누고 다시 세 사람에게 나누어 주므로

$${}_{15}C_5 \times {}_{10}C_5 \times {}_5C_5 \times \frac{1}{3!} \times 3! = 756756 \text{ (가지)}$$

64. 5 명의 사람을 2 명, 2 명, 1 명씩 서로 색깔이 다른 3 개의 오리 보트에 나누어 타는 방법의 수는?

- ① 15가지 ② 60가지 ③ 90가지
④ 180가지 ⑤ 540가지

해설

$${}_5C_2 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} \times 3! = 90$$

65. 6 명이 타고 있는 승강기가 1 층부터 4 층까지의 4 개 층에서 선다. 각각 2 명씩 3 개 층에서 모두 내리게 되는 경우의 수는?

① 60 ② 120 ③ 180 ④ 240 ⑤ 360

해설

6 명을 2 명씩 3 조로 나누는 방법은

$${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times \frac{1}{3!} = 15,$$

4 개 층 중 3 개 층에 내리므로, $15 \times {}_4P_3 = 360$ (가지)