1. 다음 중 다항함수인 것을 고르면?

① $y = x^2 - 3x + 5$

② $y = \dfrac{1}{x^2}$

③ $y^2 = x$

④ $\dfrac{1}{y} = x$

⑤ $xy = 2$

해설

① $y = x^2 - 3x + 5$ 는 x에 대한 다항식이므로 다항함수이다.

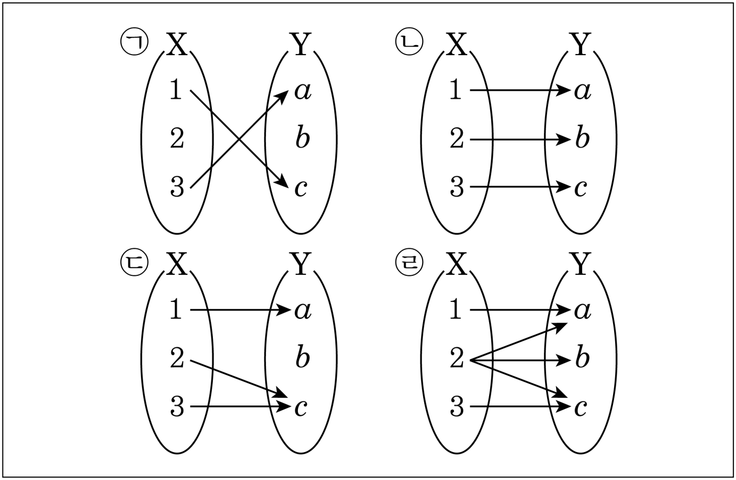
② $y = \dfrac{1}{x^2}$ 은 x에 대한 다항식이 아니므로 다항함수가 아니다.

③ $y^2 = x$ 는 $y = \pm\sqrt{x}$ 와 같이 나타내어지고 이 것은 x에 대한 다항식이 아니므로 다항함수가 아니다.

④ $\dfrac{1}{y} = x$는 $y = \dfrac{1}{x}$ 과 같이 나타내어지고 이것은 x에 대한 다항식이 아니므로 다항함수가 아니다.

⑤ $xy = 2$는 $y = \dfrac{2}{x}$ 과 같이 나타내어지고 이것은 x에 대한 다항식이 아니다.

2. 다음 대응 관계 중 X에서 Y로의 함수인 것을 모두 고른 것은?



① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢, ㉣ ⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ X의 원소 2에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

㉡, ㉢ X의 각 원소에 Y의 원소가 하나씩만 대응하므로 함수이다.

㉣ X의 원소 2에 대응하는 Y의 원소가 a, b, c 의 3개이므로 함수가 아니다.

3. 두 집합 $X = \{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 다음 중 X에서 Y로의 함수인 것은?

① $f : x \to x$

② $f : x \to -2|x|$

③ $f : x \to x^2$

④ $f : x \to x + 3$

⑤ $f : x \to |3x| + 1$

해설

③ $y = f(x) = x^2$ 에서

$f(-1) = (-1)^2 = 1 \in Y,\ f(0) = 0^2 = 0 \in Y,\ f(1) = 1^2 = 1 \in Y$

따라서 함수이다.

4. 함수 f가 임의의 양의 실수 x, y에 대하여 $f(xy) = f(x)+f(y)$, $f(2) = 1$일 때, $f(8)+f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은 얼마인가?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned} f(8) &= f(4\cdot 2) = f(4)+f(2) \\ &= f(2\cdot 2)+f(2) \\ &= f(2)+f(2)+f(2) \\ &= 3f(2) = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2) &= f\left(4\cdot\frac{1}{2}\right) \\ &= f(4)+f\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= f(2\cdot 2)+f\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= f(2)+f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\therefore\ f\left(\frac{1}{2}\right) = -f(2) = -1$$

따라서 $f(8)+f\left(\frac{1}{2}\right) = 3+(-1) = 2$

5. 함수 $f(x)$ 는 임의의 두 실수 $a,\ b$ 에 대하여 $f(a+b)=f(a)+f(b)$ 를 만족시킨다. 이러한 함수를 다음에서 고르면?

① $f(x)=|x|$ ② $f(x)=-x^2$

③ $f(x)=3x$ ④ $f(x)=2x+3$

⑤ $f(x)=x^3+3x$

해설

① $f(a+b)=|a+b|$

$f(a)+f(b)=|a|+|b|$

이 때 $|a+b|\le|a|+|b|$

② $f\ (a+b)=-(a+b)^2=-a^2-2ab-b^2$

$f(a)+f(b)=-a^2-b^2$

③ $f(a+b)=3(a+b)=3a+3b=f(a)+f(b)$

④ $f(a+b)=2(a+b)+3$

$f(a)+f(b)=2a+3+2b+3=2(a+b)+6$

$$\begin{aligned}⑤ f(a+b) &= (a+b)^3+3(a+b)\\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2+3)\\ f(a)+f(b) &= a^3+3a+b^3+3b\\ &= a^3+b^3+3(a+b)\\ &= (a+b)(a^2-ab+b^2+3)\end{aligned}$$

6. 모든 양수 m, n 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 항상 $f(mn) = f(m) + f(n)$ 만족한다.

$f(2) = a, f(3) = b$ 일 때 $f(24)$ 를 a, b 를 써서 나타내면?

① $a + 2b$ ② $2a + b$ ③ $2a + 3b$

④ $3a + b$ ⑤ $3a + 2b$

해설

$$f(24) = f(2^3 \cdot 3) = f(2^3) + f(3)$$

$$\begin{aligned} f(2^3) &= f(2^2 \cdot 2) = f(2^2) + f(2) \\ &= \{f(2) + f(2)\} + f(2) = 3f(2) \end{aligned}$$

따라서 $3f(2) + f(3) = 3a + b$

7. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족시킬 때, $f(1280)$ 의 값은 얼마인가?

(i) $f(2x) = f(x)\ (x = 1, 2, 3, \ldots)$
(ii) $f(2x+1) = 2^x\ (x = 0, 1, 2, 3, \cdots)$

① 2　② 4　③ 8　④ 16　⑤ 32

해설

$1280 = 2^8 \cdot 5$ 이므로,

$$f(2^8 \cdot 5) = f(2^7 \cdot 5) = f(2^6 \cdot 5) = \cdots = f(5)$$
$$= f(2 \cdot 2 + 1) \text{이므로,}$$

$$f(2 \cdot 2 + 1) = 2^2 = 4$$

8. $f : X \to Y,\ x \to f(x)$라 한다. X의 임의의 두 원소를 $a,\ b$라 할 때, 다음 중에서 f가 일대일 함수일 조건은?

① $a = b$ 이면 $f(a) = f(b)$

② $f(a) = f(b)$ 이면 $a = b$

③ $f(a) \neq f(b)$ 이면 $a \neq b$

④ $a \neq b$ 이면 $f(a) = f(b)$

⑤ $a = b$ 이면 $f(a) \neq f(b)$

해설

일대일함수의 정의

「$a \neq b$ 이면, $f(a) \neq f(b)$」의 대우

9. 자연수의 집합을 N, 양의 유리수 집합을 Q^+라고 할 때, 함수 f가 $f\ :Q^+ \ \rightarrow\ N \times N$으로 정의될 때, 다음 중 일대일 대응인 것은? (단, p, q는 서로소)

① $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = (p,\ 0)$

② $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = (0,\ q)$

③ $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = (p+q,\ 0)$

④ $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = (0,\ pq)$

⑤ $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = (p,\ q)$

해설

① $\dfrac{2}{3} \neq \dfrac{2}{5}$일 때

$f\left(\dfrac{2}{3}\right) = f\left(\dfrac{2}{5}\right) = (2.\ 0)$

②, ③, ④도 같은 방법으로

일대일 대응이 아님을 보일 수 있다.

10. 항등함수와 상수함수에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것을 모두 고르면?(단, R는 실수 전체의 집합이다.)

① 항등함수는 일대일 대응이다.

② $f: R \rightarrow R$가 항등함수이면 $f(x) = x$이다.

③ 항등함수를 그래프로 나타내면 항상 직선 $y = x$가 된다.

④ 집합 R에서 R로의 상수함수는 오직 하나뿐이다.

⑤ 상수함수를 그래프로 나타내면 항상 직선이 된다.

해설

③ 정의역과 공역이 실수 전체의 집합일 경우에만 항등함수의 그래프가 직선 $y = x$이다.
(반례) $f: X \rightarrow Y,\ f(x) = x$에서
$X = \{1,\ 2,\ 3\}$, $Y = \{1,\ 2,\ 3\}$이면
$y = f(x)$의 그래프는 직선 $y = x$가 아니다.
④ 집합 R에서 R로의 상수함수는 무수히 많다.
⑤ 정의역이 실수 전체의 집합일 경우에만 상수함수의 그래프가 직선이 된다.
(반례) $f: X \rightarrow Y$, $f(x) = 3$에서
$X = \{1,\ 2,\ 3\}$이면 $y = f(x)$는 직선이 아니다.
따라서, 옳지 않은 것은 ③, ④, ⑤이다.

11. 두 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$, $Y = \{a,\ b,\ c,\ d\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로 대응되는 함수의 개수를 a, 일대일 대응의 개수를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=64$

해설

정의역과 공역의 개수가 다르므로
일대일 대응은 없고, 정의역의 개수가 A
공역의 개수가 B 일 때 함수 개수는 B^A 이다.
$\therefore\ 4^3 = 64$
$\therefore\ a+b=64$

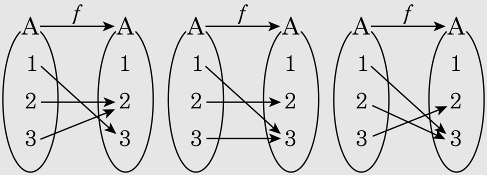
12. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족시키는 함수 $f : A \to A$ 의 개수는 몇 개인가?

Ⅰ. $f(1) = 3$ Ⅱ. $x \in A$ 에 대하여 $f(x)$ 의 최솟값은 2 이다.

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

두 조건을 만족시키기 위해서는
$f(2) = 2$ 또는 $f(3) = 2$ 를 만족시키고
$f(2),\ f(3)$ 의 값이 동시에
3 이 되어서는 안되며 어떤 원소도
1 에 대응해서는 안된다.
따라서, 함수 f 의 대응은 다음과 같다.



$\therefore$ 3 개

13. 함수 $f(x) = x+1$ 라 할 때, $f^{10}(2)$ 의 값을 구하여라. (단, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f^{n-1} \circ f$)

▶ **답 :**

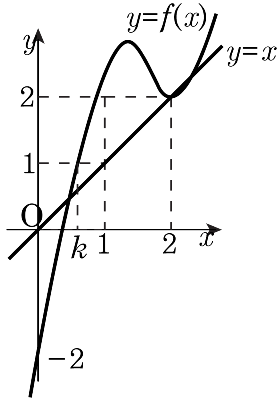
▷ **정답 :** 12

해설

$$\begin{aligned} f^2(x) &= (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x+1) \\ &= (x+1)+1 = x+2 \\ f^3(x) &= (f^2 \circ f)(x) = f^2(f(x)) = f^2(x+1) \\ &= (x+1)+2 = x+3 \\ f^4(x) &= (f^3 \circ f)(x) = f^3(f(x)) = f^3(x+1) \\ &= (x+1)+3 = x+4 \\ &\cdots \\ f^n(x) &= x+n \end{aligned}$$

$\therefore\ f^{10}(2) = 2+10 = 12$

14. 다음 그림과 같이 함수 $f(x)=x^3-5x^2+8x-2$ 에서 $f(k)=1$ 일 때, $f^{10}(k)$ 의 값은?(단, $f^2=f\circ f,\ f^3=f^2\circ f,\ f^n=f^{n-1}\circ f$)



① 1　　② 2　　③ 3　　④ 5　　⑤ 11

해설

$f(k)=1$

$f^2(k)=f(f(k))=f(1)=2$

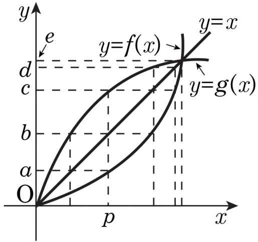
$f^3(k)=f^2\circ f(k)=f^2(f(k))=f^2(1)$

$\quad\quad =f(f(1))=f(2)=2$

$\vdots$

$f^{10}(k)=2$

15. 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, $(f \circ g)(p)$ 의 값은 얼마인가? (단, 점선은 x 축 또는 y 축에 평행하다.)



① a ② b ③ c

④ d ⑤ e

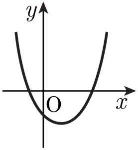
해설

주어진 그림에서 $g(p) = c, f(c) = b$

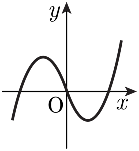
$\therefore (f \circ g)(p) = f(g(p)) = f(c) = b$

16. 다음 그래프 중에서 실수전체 집합에서 역함수가 존재하는 함수의 그래프는?

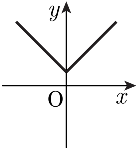
①



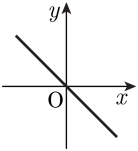
②



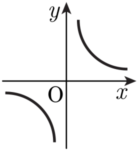
③



④



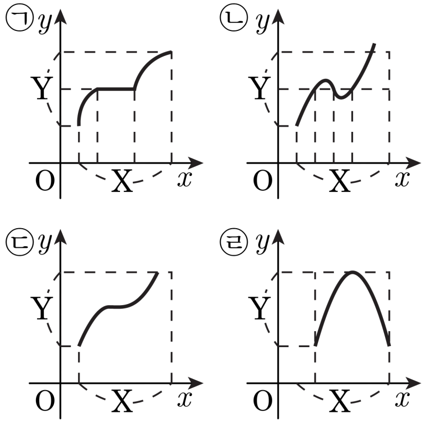
⑤



해설

역함수가 존재하려면 함수가 일대일 대응이어야 한다.
일대일 대응이란 변수 x, y가 서로 하나씩 대응되는 것으로 ④에 해당된다.
⑤번은 $x = 0$ 에 대응되는 y가 없다.

17. 함수 $f : X \to Y$ 의 그래프가 다음과 같다고 한다. 이 중에서 역함수가 존재하는 것은?

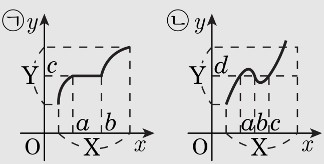


① ㉠, ㉢　　② ㉡, ㉣　　③ ㉢

④ ㉠　　⑤ ㉠, ㉡, ㉣

해설

X 에서 Y 로의 일대일대응을 찾으면 된다.



㉠ : $\{x|a \le x \le b\}$ 에 속하는 x 의 상이 모두 c 이므로 일대일대응이 아니다.

㉡ : a, b, c 의 상이 모두 d 이므로 일대일 대응이 아니다.

㉣ : ㉡의 경우와 같다.

18. 함수 $f(x)=ax+b(a>0)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 이 함수 $f(x)$와 같을 때, 상수 a, b의 값을 구하면?

① $a=1,\ b=0$ ② $a=1,\ b=1$ ③ $a=2,\ b=0$
④ $a=2,\ b=1$ ⑤ $a=3,\ b=0$

해설

$f^{-1}(x)=f(x)$에서 $f(f(x))=x$

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= af(x)+b \\ &= a(ax+b)+b \\ &= a^2x+ab+b \end{aligned}$$

$a^2x+ab+b=x$

$\therefore\ a^2=1,\ ab+b=0$

$\therefore\ a=1,\ b=0$

19. 함수 $f(x)=2ax-a+2$에 대하여 $f^{-1}(-7)=2$일 때, 상수 a의 값은 얼마인가?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$f^{-1}(-7)=2$이므로
역함수의 정의에 의해서
$f(2)=-7$, $f(2)=2a\times2-a+2=-7$, $3a=-9$
$\therefore a=-3$

20. 두 함수 f, g 가 $f(2)=3$, $g^{-1}(1)=4$ 일 때, $f^{-1}(3)+g(4)$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 3

해설

$f(2)=3$ 에서 $f^{-1}(3)=2$ 이고
$g^{-1}(1)=4$ 에서 $g(4)=1$ 이므로
$f^{-1}(3)+g(4)=2+1=3$

21. 유한집합 X 에서 유한집합 Y 로의 함수 f 의 역함수 f^{-1} 가 존재한다고 한다. 다음 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $n(X) = n(Y)$ 이다.

② $x_1 = x_2$ 이면 $f(x_1) = f(x_2)$

③ $f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2)$ 이면 $x_1 = x_2$ 이다.

④ $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = -x$ 에 대하여 대칭이다.

⑤ $f(a) = b$ 이면 $f^{-1}(b) = a$ 이다.

해설

①, ②, ③, ⑤ : 역함수를 갖기 위해서는 일대일 대응이 어야 한다.

④ : $y = x$ 에 대해 대칭관계이다.

22. 양의 실수에서 정의된 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & (x \geq 1) \\ \dfrac{1}{x}+1 & (0 < x < 1) \end{cases}$$

일 때, $(f \circ f \circ f)(a) = 5$ 를 만족하는 상수 a 의 값을 구하면?

① -3 ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$(f \circ f \circ f)(a) = 5$ 에서 $f(f(f(a))) = 5$ 이므로

$f(f(a)) = f^{-1}(5) = k_1$ 이라 하면 $f(k_1) = 5$

$5 > 1$ 이므로 $0 < k_1 < 1$, $\dfrac{1}{k_1} + 1 = 5$

$\therefore\ k_1 = \dfrac{1}{4}$

$\therefore\ f(f(a)) = \dfrac{1}{4}$

$f(a) = f^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right) = k_2$ 라 하면 $f(k_2) = \dfrac{1}{4}$

$\dfrac{1}{4} < 1$ 이므로 $k_2 \geq 1$, $\dfrac{1}{k_2+1} = \dfrac{1}{4}$

$\therefore\ k_2 = 3$

$f(a) = 3$ 에서 $3 \geq 1$ 이므로 $0 < a < 1$

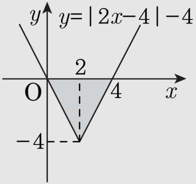
$\therefore\ \dfrac{1}{a} + 1 = 3,\ a = \dfrac{1}{2}$

23. 함수 $y=|2x-4|-4$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설



절대값 기호 안을 0으로 하는 x의 값은

$2x-4=0$ 에서 $x=2$

(i) $x<2$ 일 때, $y=-(2x-4)-4=-2x$

(ii) $x\geq 2$ 일 때, $y=(2x-4)-4=2x-8$

따라서 (i), (ii)에 의하여

함수 $y=|2x-4|-4$ 의 그래프는 그림과 같으므로

구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$

24. $\dfrac{1}{a(a+1)}+\dfrac{2}{(a+1)(a+3)}+\dfrac{3}{(a+3)(a+6)}$ 을 간단히 한 것은 ?

① $\dfrac{1}{a}+\dfrac{6}{a+6}$ ② $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a+6}$ ③ $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+6}$
④ $\dfrac{1}{a}-\dfrac{6}{a+6}$ ⑤ $\dfrac{2}{a}-\dfrac{1}{a+6}$

해설

(준식)

$=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{1}{a+3}+\dfrac{1}{a+3}-\dfrac{1}{a+6}$

$=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+6}$

25. 다음 식을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}=10$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -9

해설

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}=\frac{1}{1-\frac{x}{x-1}}=\frac{x-1}{x-1-x}=1-x$$

$1-x=10$

$\therefore x=-9$

26. $x^2-5x+1=0$일 때, $x^2+\dfrac{1}{x^2}$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 23

해설

$x^2-5x+1=0$에서 양변을 x로 나눈다.

$x+\dfrac{1}{x}-5=0$

$x+\dfrac{1}{x}=5$

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=25-2=23$

27. 곡선 $xy + x - 3y - 2 = 0$ 이 지나지 않는 사분면을 구하면?

① 제 1 사분면 ② 제 2 사분면 ③ 제 3 사분면

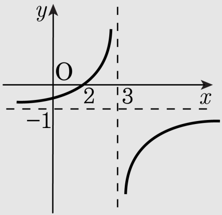
④ 제 4 사분면 ⑤ 없다.

해설

$xy + x - 3y - 2 = 0$ 을 y 에 대하여 정리하면 $(x-3)y = -x+2$

$$\therefore\ y = \frac{-x+2}{x-3} = \frac{-1}{x-3} - 1 (x \neq 3)$$

즉, $y = \dfrac{-1}{x-3} - 1$ 은 점근선이 $x = 3,\ y = -1$ 이고 점 $(2,\ 0)$ 을 지나므로 그래프는 다음 그림과 같다. 따라서, 제 2 사분면을 지나지 않는다.



28. 함수 $y = \dfrac{k}{x-1} + 3\ (k \neq 0)$ 의 그래프에 대한 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ $k > 0$ 이면 제 1 사분면과 제 3 사분면을 지난다.

ㄴ $k < 0$ 이면 제 1, 2, 4 사분면을 지난다.

ㄷ $k > 3$ 이면 모든 사분면을 지난다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

점근선은 $x = 1, y = 3$ 이다.
ㄱ, ㄷ : $0 < k \leq 3$ 이면, 제 $1, 2, 4$ 사분면을 지난다.
$k > 3$ 이면 모든 사분면을 지난다.
ㄴ : $k < 0$ 이면, 제 $1, 2, 4$ 사분면을 지난다.
$\therefore$ ㄴ, ㄷ 이 참.

29. 두 함수의 그래프 $y=x-1, y=-\frac{1}{2}x+2$ 의 교점 (p, q) 에 대해 대칭인 유리함수 $y=\frac{cx+d}{ax+b}$ 가 원점을 지난다고 할 때, $a+b+c+d$ 의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$y=x-1$과 $y=-\frac{1}{2}x+2$의 교점은

$x-1=-\frac{1}{2}x+2,\ 2x-2=-x+4$

$\therefore x=2,\ y=1 \quad \therefore (p,\ q)=(2,\ 1)$

이 때, $(2,\ 1)$ 에 대해 대칭인 유리함수는

$y=\frac{k}{x-2}+1$ 이고 원점을 지나므로

$0=\frac{k}{-2}+1$

$\therefore k=2$

$y=\frac{2}{x-2}+1=\frac{2+x-2}{x-2}=\frac{x}{x-2}$

$=\frac{cx+d}{ax+b}$

$\therefore a=1,\ b=-2,\ c=1,\ d=0$

$\therefore a+b+c+d=0$

30. 분수함수 $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ 가 있다. 이 함수의 그래프가 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이기 위한 필요충분조건은?

① $a-d=0$ ② $a+d=0$ ③ $ad=1$

④ $ad=-1$ ⑤ $ad-bc=0$

해설

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\frac{a}{c}(cx+b) - \frac{ab}{c} + b}{cx+d}$$

$$= \frac{\frac{b}{c}(c-a)}{cx+d} + \frac{a}{c} = \frac{b(c-a)}{c(cx+d)} + \frac{a}{c}$$

주어진 분수함수의 점근선은

$x = -\dfrac{d}{c}$, $y = \dfrac{a}{c}$ 이므로

그래프는 점 $\left(-\dfrac{d}{c}, \dfrac{a}{c}\right)$ 에 대하여 대칭이다. 이때, 이 분수함수의 그래프가 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 점 $\left(-\dfrac{d}{c}, \dfrac{a}{c}\right)$ 은 직선 $y = x$ 위에 있다.

$\therefore \dfrac{a}{c} = -\dfrac{d}{c}$, $a = -d$

$\therefore a + d = 0$

31. 함수 $y = \dfrac{2x+3}{x+4}$ 의 그래프는 점 (p, q)에 대하여 대칭이고, 동시에 $y = x + r$에 대하여 대칭이다. 이때, $p+q+r$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$$y = \frac{2x+3}{x+4} = \frac{2(x+4)-5}{x+4} = \frac{-5}{x+4} + 2$$

따라서 $y = \dfrac{2x+3}{x+4}$ 의 그래프는 점 $(-4, 2)$에 대하여 대칭이고,

점 $(-4, 2)$를 지나고

기울기가 1인 직선 $y = x + 6$에 대하여 대칭이다.

$\therefore p = -4$, $q = 2$, $r = 6$

$\therefore p + q + r = -4 + 2 + 6 = 4$

32. 함수 $y = \dfrac{3x-5}{x-1}$ 의 그래프가 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭일 때, ab 의 값들을 모두 구하면?

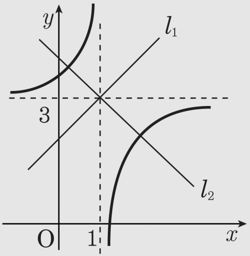
① 2, -4 ② -2, 4 ③ 2, 4

④ -2, -4 ⑤ 3, 5

해설

$$y = \frac{3x-5}{x-1} = \frac{3(x-1)-2}{x-1} = \frac{-2}{x-1} + 3$$

따라서 위의 그림과 같이 직선 l_1, l_2 에 대하여



대칭이다.

l_1 : $y - 3 = 1 \cdot (x-1)$ $\therefore$ $y = x + 2$

l_2 : $y - 3 = -1 \cdot (x-1)$ $\therefore$ $y = -x + 4$

따라서 $ab = 2$ 또는 $ab = -4$

33. $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$을 계산하면 $a+b\sqrt{c}$가 된다. 이때, $a+b+c$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=5-2\sqrt{6}$$

$a=5,\ b=-2,\ c=6$

$\therefore a+b+c=9$

34. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ 일 때, $\dfrac{1}{f(1)} + \dfrac{1}{f(2)} + \cdots + \dfrac{1}{f(99)}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ 이므로

$$\frac{1}{f(x)} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{준 식}) &= (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \\ &\quad (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{100}-\sqrt{99}) \\ &= \sqrt{100}-1 = 10-1 = 9\end{aligned}$$

35. $3-\sqrt{2}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을b 라 할 때, $a+\dfrac{2}{b}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $3+\sqrt{2}$

해설

$1<\sqrt{2}<2$ 이므로 $a=1,\ \ b=2-\sqrt{2}$

따라서 $a+\dfrac{2}{b}=1+\dfrac{2}{2-\sqrt{2}}$

$$=1+\frac{2(2+\sqrt{2})}{2}$$

$$=3+\sqrt{2}$$

36. $3+\sqrt{8}$의 소수 부분을 x라 할 때, $\sqrt{x^2+4x}$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

(1) 단계

$2<\sqrt{8}<3$이므로

$3+\sqrt{8}-2+2=5+\sqrt{8}-2$ 에서

소수 부분 $x=\sqrt{8}-2$

(2) 단계

$x+2=\sqrt{8}$

(양변을 제곱하면) $x^2+4x+4=8$,

$x^2+4x=4$를 대입하면

(준식)$=\sqrt{4}=2$

37. $x=\sqrt{2}+1$, $y=\sqrt{2}-1$ 일 때,

$\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ 의 값은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

해설

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

$$=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{x-y}$$

$$=\frac{x+y-2\sqrt{xy}+x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}=\frac{2(x+y)}{x-y}$$

$$\begin{cases} x+y=\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1=2\sqrt{2} \\ x-y=\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1=2 \end{cases}$$

$$\therefore\ \frac{2(x+y)}{x-y}=\frac{2\times 2\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$$

38. $x = 2 + \sqrt{3},\ y = 2 - \sqrt{3}$ 일 때, $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$ 의 값은?

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

해설

$x = 2 + \sqrt{3},\ y = 2 - \sqrt{3}$ 일 때,

$xy = 4 - 3 = 1,\ x + y = 4$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{14}{1} = 14$$

$(\therefore x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy)$

39. $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, $y = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ 일 때, 다음 식의 값은?

$$\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{y}\right)^3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

① $3(\sqrt{3} + \sqrt{2})$　② $3(\sqrt{3} - \sqrt{2})$　③ 9

④ $5(\sqrt{3} + \sqrt{2})$　⑤ $7(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

해설

$$(\text{주어진 식}) = \frac{\frac{x^3 + y^3}{(xy)^3}}{\frac{x + y}{xy}}$$

$$= \frac{(x+y)^3 - 3xy(x+y)}{(x+y)(xy)^2}$$

$$= \frac{(x+y)^2 - 3xy}{(xy)^2}$$

조건에서 $x + y = 2\sqrt{3},\ xy = 1$

$$\therefore\ (\text{주어진 식}) = \frac{(2\sqrt{3})^2 - 3 \cdot 1^2}{1} = 9$$

40. $x = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$, $y = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ 일 때, x^3+y^3 의 값은?

① $8\sqrt{3}$ ② $24\sqrt{3}$ ③ $30\sqrt{3}$ ④ 48 ⑤ 52

해설

$$x = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3},$$

$$y = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$$

$$x+y=4, \quad xy=1$$

$$\begin{aligned} x^3+y^3 &= (x+y)^3-3xy(x+y) \\ &= 4^3-3\times 4 = 52 \end{aligned}$$

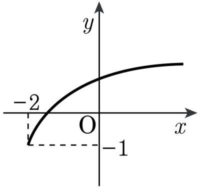
41. $0 < a < 1$이고 $x = a - \dfrac{1}{a}$일 때, $\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2}$를 a로 나타내면?

① $2a$ ② $\dfrac{2}{a}$ ③ $-\dfrac{2}{a}$ ④ $-2a$ ⑤ 0

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2} &= \sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4} - \sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2} - \left|a-\frac{1}{a}\right| \\ &= \left(a+\frac{1}{a}\right) + \left(a-\frac{1}{a}\right) = 2a\end{aligned}$$

42. 다음 그래프는 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를 평행 이동한 것이다. 이 그래프의 함수는?



① $y = \sqrt{x-2}+1$

② $y = \sqrt{x-2}-1$

③ $y = \sqrt{x+2}+1$

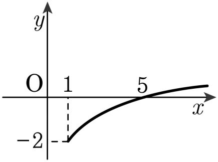
④ $y = \sqrt{x+2}-1$

⑤ $y = -\sqrt{x-2}-1$

해설

x축으로 -2만큼
y축으로 -1만큼 평행이동했으므로
x 대신 $x+2$, y 대신 $y+1$을 대입하면
$y = \sqrt{x+2}-1$

43. 다음 그림은 무리함수 $y = \sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 그린 것이다. 이 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$ 의 값은?



① 1 ② −1 ③ 2

④ −2 ⑤ 3

해설

$y = \sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$의 그래프를 보면

점$(1, -2)$에서부터 시작하므로

$-\frac{b}{a} = 1,\ c = -2$

$\therefore -b = a\ ,\ c = -2$

$y = \sqrt{ax-a}-2$가 점$(5, 0)$을 지나므로

$0 = \sqrt{5a-a}-2,\ 2 = \sqrt{4a}$

양변을 제곱하면 $4 = 4a$

$\therefore\ a = 1$

따라서 $a = 1, b = -1, c = -2$이므로

$a+b+c = 1-1-2 = -2$

44. 1부터 72까지의 자연수 중에서 72와 서로소인 수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 24 개

해설

$72 = 2^3 \times 3^2$

72와 서로소는 2의 배수도 아니고, 3의 배수도 아닌 것

$\therefore\ 72 - (36 + 24 - 12) = 24$

$\therefore$ 24개

45. 540의 양의 약수의 총합을 구하여라.

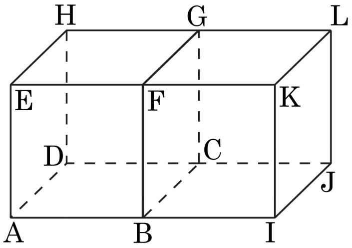
▶ 답 :

▷ 정답 : 1680

해설

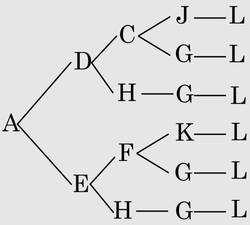
$$(1+2+2^2)(1+3+3^2+3^3)(1+5)$$
$$=7\times40\times6=1680$$

46. 두 개의 정육면체가 서로 붙어 있는 아래 그림에서 A 에서부터 L 까지 모서리를 따라 최단 거리로 가는 방법 중 B 를 통과하지 않는 방법의 수를 구하면?



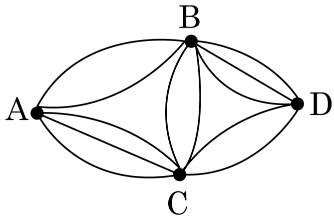
① 4 ② 6 ③ 8 ④ 12 ⑤ 16

해설



위의 수형도에서 구하는 방법의 수는 6 가지이다.

47. A, B, C, D 네 지점 사이에 오른쪽그림과 같은 도로망이 있다. A 에서 D 까지의 경로는 모두 몇 가지인가? (단, 동일 지점은 많아야 한번만 지난다.)



▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 38 가지

해설

A 에서 D 까지의 경로는
$A \to B \to D$ 의 경우 : $2 \times 3 = 6$ (가지)
$A \to C \to D$ 의 경우: $3 \times 2 = 6$ (가지)
$A \to B \to C \to D$ 의 경우 :
$2 \times 2 \times 2 = 8$ (가지)
$A \to C \to B \to D$ 의 경우 :
$3 \times 2 \times 3 = 18$ (가지)
따라서 구하는 가지수는
$6 + 6 + 8 + 18 = 38$ (가지)

48. 100 원짜리, 50 원짜리, 10 원짜리 세 종류의 동전으로 200 원을 지불할 수 있는 경우의 수는 몇 가지인가? (모든 종류의 동전을 사용할 필요는 없다.)

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

(100 원짜리, 50 원짜리, 10 원짜리) 각각의 순서쌍을 구하면
$(2,0,0)$, $(1,2,0)$, $(1,1,5)$, $(1,0,10)$, $(0,4,0)$, $(0,3,5)$, $(0,2,10)$, $(0,1,15)$, $(0,0,20)$
$\therefore$ 9가지

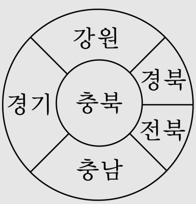
49. 다음 그림은 우리나라 지도의 일부분이다. 6 개의 도를 서로 다른 4 가지의 색연필로 칠을 하여 도(☒)를 구분하고자 한다. 색칠을 하는 방법의 가지 수를 구하면?

① 32 가지 ② 56 가지 ③ 72 가지

④ 96 가지 ⑤ 118 가지

해설

위 지도를 다음 그림과 같이 생각하면,



충북에 색칠하는 방법의 수는 4 (가지)
충남에 색칠하는 방법의 수는 3 (가지)
전북에 색칠하는 방법의 수는 2 (가지)
경기에 색칠하는 방법의 수는 2 (가지)
경북에 색칠하는 방법의 수는 2 (가지)
강원에 색칠하는 방법의 수는 1 (가지)
그러므로 $4 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 = 96$
$\therefore$ 96 가지

50. $1, 2, 3$ 으로 만들 수 있는 세 자리의 자연수는 27개가 있다. 이 중에서 다음 규칙을 만족시키는 세 자리의 자연수의 개수를 구하여라.

(가) 1 바로 다음에는 3 이다.

(나) 2 바로 다음에는 1 또는 3 이다.

(다) 3 바로 다음에는 1 , 2 또는 3 이다.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 13 가지

해설

조건에 맞는 세 자리수는 131, 132, 133, 213, 231, 232, 233, 313, 321, 323, 331, 332 ,333 이므로 13 가지이다.

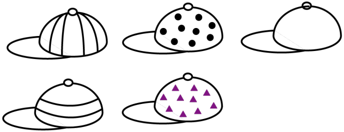
51. 다항식 $(a+b+c)(p+q+r)-(a+b)(s+t)$ 를 전개하였을 때 항의 개수는?

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

해설

$(a+b+c)(p+q+r)$ 의 전개식의 항의 개수는
$3\times3=9$
$(a+b)(s+t)$ 의 전개식의 항의 개수는
$2\times2=4$
따라서 구하는 항의 개수는 $9+4=13$ 이다.

52. 5명이 자기 모자를 벗어 섞은 후 다시 무심코 1개를 집을 때 한 사람만이 자신의 모자를 가지게 되는 경우의 수는?



① 33 ② 36 ③ 40 ④ 45 ⑤ 54

해설

n명이 전부 다른 사람의 모자를 집어 드는 경우의 수를 F_n 이라고 하면

$F_{n=}(n-1)(F_{n-1+}F_{n-2})(n \geq 3)$,

$F_0 = 0, F_1 = 1$ 이므로

$F_3 = 2, F_4 = 9$

따라서 구하는 경우의 수는

$5F_4 = 5 \times 9 = 45$

53. 남자 4 명, 여자 3 명을 일렬로 세울 때, 여자 3 명이 이웃하여 서는 경우의 수를 구하여라.

▶ **답 :** ______ 가지

▷ **정답 :** 720 가지

해설

여자 3 명을 한 묶음으로 본다.

$5! \times 3! = 720$

54. A, B, C, D, E 다섯 명의 학생이 있다. 항상 D가 C보다 앞에 오도록 일렬로 서는 방법의 수는?

① 12 ② 20 ③ 24 ④ 30 ⑤ 60

해설

전체를 줄세운 다음 C, D가 순서를 바꾸어 서는 경우로 나누어 주면 된다.

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

55. 0, 1, 2, 3, 4, 5 의 6 개의 숫자를 한번씩 사용하여 네 자리의 정수를 만들 때, 양 끝이 홀수인 자연수의 개수를 구하면?

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 72 개

해설

양 끝이 홀수이므로 1, 3, 5 중 2 개를 배열하는 경우의 수는

${}_3P_2 = 6$

두 홀수를 제외한 나머지 4 개의 숫자를 배열하는 경우의 수는

${}_4P_2 = 12$

따라서 $6 \times 12 = 72$

56. 그림과 같은 직사각형의 틀에 숫자 1, 1, 2, 3을 제 1행의 각 칸에 1개씩 나열하고 제 2행에도 숫자 1, 1, 2, 3 을 각 칸에 1개씩 나열할 때, 같은 열에는 같은 숫자가 들어가지 않게 나열하는 경우의 수는?

1행				
2행				

① 15　② 18　③ 20　④ 22　⑤ 24

해설

숫자 1, 1, 2, 3을 같은 열에는 같은 숫자가 들어가지 않게 나열하는 방법의 수는 (1 2), (1 3), (2 1), (3 1)을 일렬로 나열하는 방법의 수와 일치하므로 $4! = 24$

57. 1 부터 9 까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 아홉 장의 카드가 있다. 이 중 4 장의 카드를 뽑아 갑에게 2 장, 을에게 2 장을 주었을 때, 뽑힌 4 장 중 제일 작은 수가 적힌 카드가 갑에게 있을 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : ________ 가지

▷ 정답 : 378 가지

해설

9장 중 4장의 카드를 뽑는 방법의 수는

$${}_9C_4 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$$

뽑힌 4장의 카드 중 제일 작은 수의 카드는 갑에게 주고, 나머지 3장 중 1장의 카드만 갑에게 주면 나머지 2장은 을에게 간다.

$\therefore\ {}_9C_4 \cdot {}_3C_1 = 378$

58. $X=\{1,2,3\}$ 에서 $Y=\{a,b,c,d,e\}$ 로 대응되는 함수 중 $x_1<x_2$ 이면 $f(x_1)<f(x_2)$ 인 함수의 개수를 구하여라.

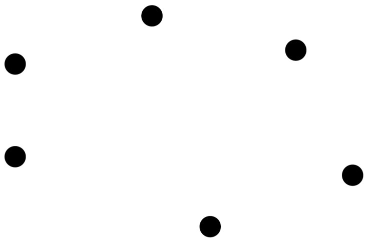
▶ **답 :** ________ 개

▷ **정답 :** 10 개

해설

Y 의 원소 5 개 중 X 의 원소 1, 2, 3 에
대응될 원소 3 개를 뽑으면 된다.
${}_5C_3=10$

59. 다음 그림과 같이 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않은 서로 다른 6 개의 점에 대하여 만들어지는 직선의 개수를 구하여라.



▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 15 개

해설

두 점을 이어서 만들 수 있는 직선의 개수는

$${}_6\mathrm{C}_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15 \text{ (개)}$$

60. 크기와 모양이 다른 9개의 구슬을 4개, 3개, 2개로 나누어 3명의 어린이에게 나누어 주는 방법의 수는?

① 7480 ② 7520 ③ 7560 ④ 7600 ⑤ 7640

해설

$_9C_4 \times _5C_3 \times _2C_2 \times 3! = 7560$

61. 서로 다른 9 개의 사탕이 있을 때, 사탕을 3 개씩 세 묶음으로 나누어 갑, 을, 병에게 나누어 주는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 1680 가지

해설

$${}_9C_3 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{3!} \times 3! = 1680$$

62. 서로 다른 과일 6 개에 대하여 과일을 1 개, 2 개, 3 개로 나누어 세 학생에게 나누어 주는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 360 가지

해설

나눈 후 배열하는 방법까지 고려한다.

$\Rightarrow {}_6C_1 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3 \times 3! = 360$

63. 서로 다른 15 종류의 꽃이 있다. 5개씩 세 사람에게 나누어 주는 방법은 몇 가지인가?

① ${}_{15}C_5 \times {}_{10}C_5 \times {}_5C_5$

② ${}_{15}C_5 \times {}_{10}C_5 \times {}_5C_5 \times \frac{1}{3!}$

③ ${}_{15}C_5 \times {}_{10}C_5 \times {}_5C_5 \times 3!$

④ ${}_{15}C_5 \times {}_{10}C_5 \times {}_5C_5 \times \frac{1}{3!} \times 3!$

⑤ ${}_{15}C_5 \times {}_{10}C_5$

해설

5 개씩 3 뭉치로 나누고 다시 세 사람에게 나누어 주므로

${}_{15}C_5 \times {}_{10}C_5 \times {}_5C_5 \times \frac{1}{3!} \times 3! = 756756$ (가지)

64. 5 명의 사람을 2 명, 2 명, 1 명씩 서로 색깔이 다른 3 개의 오리 보트에 나누어 타는 방법의 수는?

① 15가지 ② 60가지 ③ 90가지

④ 180가지 ⑤ 540가지

해설

$$_5C_2 \times _3C_2 \times _1C_1 \times \frac{1}{2!} \times 3! = 90$$

65. 6 명이 타고 있는 승강기가 1 층부터 4 층까지의 4 개 층에서 선다. 각각 2 명씩 3 개 층에서 모두 내리게 되는 경우의 수는?

① 60　② 120　③ 180　④ 240　⑤ 360

해설

6 명을 2 명씩 3 조로 나누는 방법은

${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times \frac{1}{3!} = 15$,

4 개 층 중 3 개 층에 내리므로, $15 \times {}_4P_3 = 360$ (가지)