

1. 두 다항식 A, B 에 대하여 연산 Δ, ∇ 를 $A\Delta B = 2A + B, A\nabla B = A - 3B$ 로 정의한다.

$A = 2 + 3x^2 - x^3, B = x^2 + 3x + 1$ 일 때 $A\nabla(B\Delta A)$ 를 구하면?

- ① $2x^3 - 18x - 10$
- ② $2x^3 - 12x^2 - 18x - 10$
- ③ $2x^3 + 12x^2 + 18x + 10$
- ④ $2x^3 + 12x^2 + 18x - 10$
- ⑤ $2x^3 - 12x^2 + 18x + 10$

해설

$$\begin{aligned} A\nabla(B\Delta A) &= A\nabla(2B + A) \\ &= A - 3(2B + A) = -2A - 6B \end{aligned}$$

위와 같이 식을 간단히 정리한 후 A, B 에 대입하여 정리한다.

2. 사차식 $3x^4 - 5x^2 + 4x - 7$ 을 이차식 A 로 나누었더니 몫이 $x^2 - 2$ 이고 나머지가 $4x - 5$ 일 때, 이차식 A 를 구하면?

① $3x^2 - 2$

② $3x^2 - 1$

③ $3x^2$

④ $3x^2 + 1$

⑤ $3x^2 + 2$

해설

$$\text{검산식 : } 3x^4 - 5x^2 + 4x - 7 = A(x^2 - 2) + 4x - 5$$

$$A = \frac{3x^4 - 5x^2 - 2}{x^2 - 2} = 3x^2 + 1$$

3. $x + y + z = 1$, $xy + yz + zx = 2$, $xyz = 3$ 일 때, $(x + 1)(y + 1)(z + 1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$\begin{aligned} & (x + 1)(y + 1)(z + 1) \\ &= xyz + xy + yz + zx + x + y + z + 1 \\ &= 7 \end{aligned}$$

4. 다음 식을 전개한 것 중 옳은 것을 고르면?

① $(x - y - z)^2 = x^2 - y^2 - z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$

② $(3x - 2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 18xy^2 - 8y^3$

③ $(x + y)(x - y)(x^2 + xy - y^2)(x^2 - xy + y^2) = x^9 - y^9$

④ $(x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + 2y^2) = x^4 + 4y^4$

⑤ $(x + y - 1)(x^2 + y^2 - xy + 2x + 2y + 1) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$

해설

① $(x - y - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$

② $(3x - 2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$

③ $(x + y)(x - y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) = x^6 - y^6$

⑤ $(x + y - 1)(x^2 + y^2 - xy + x + y + 1) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$

5. $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$ 를 전개할 때, 각 항의 계수의 총합을 a , 상수항을 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 8 ② 15 ③ 24 ④ 36 ⑤ 47

해설

$$\begin{aligned} & (x-1)(x+2)(x-3)(x+4) \\ &= (x^2+x-2)(x^2+x-12)(x^2+x=X(\text{치환})) \\ &= (X-2)(X-12) \\ &= X^2-14X+24 \\ &= (x^2+x)^2-14(x^2+x)+24 \\ &= x^4+2x^3-13x^2-14x+24 \\ \therefore a &= 1+2-13-14+24=0, b=24 \\ \therefore a+b &= 0+24=24 \end{aligned}$$

해설

㉠ 각 항 계수의 총합 구하기

$x=1$ 대입, $a=0$

㉡ 상수항 구하기

$x=0$ 대입, $b=24$

6. $P = (2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$ 의 값을 구하면?

- ① $2^{32} - 1$ ② $2^{32} + 1$ ③ $2^{31} - 1$
④ $2^{31} + 1$ ⑤ $2^{17} - 1$

해설

주어진 식에 $(2 - 1) = 1$ 을 곱해도 식은 성립하므로
 $P = (2 - 1)(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$
 $= (2^2 - 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$
 $= (2^4 - 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$
 $= \vdots$
 $= (2^{16} - 1)(2^{16} + 1)$
 $= 2^{32} - 1$

7. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ 일 때, $f(x) - 2 = x(x^2 - 1) + a(x - x^2) + b(x^2 - 1)$ 가 항상 성립하도록 하는 상수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x) - 2 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ 이므로
 $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x(x^2 - 1) + a(x - x^2) + b(x^2 - 1)$
 $= x^3 + (-a + b)x^2 + (a - 1)x - b \cdots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 이 x 에 대한 항등식이므로 양변의 차수가 같은 항의 계수가 같아야 한다.
즉, $-a + b = -3, a - 1 = 3, b = 1$
이므로 $a = 4, b = 1$
 $\therefore a + b = 5$

8. 상수 a, b 에 대하여 다음 등식이 항상 성립할 때, $2a + b$ 의 값은?

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} = \frac{6(x+1)}{(x-1)(x+3)}$$

- ① 2
- ② 3
- ③ 5
- ④ 7
- ⑤ 9

해설

등식이 항상 성립하기 위해서는 (분모) $\neq 0$ 이어야 한다.
양변에 공통분모인 $(x-1)(x+3)$ 을 곱하면,
 $a(x+3) + b(x-1) = 6(x+1)$
 $(a+b)x + (3a-b) = 6x+6$
 $\therefore a+b=6, 3a-b=6$
두 식을 연립하여 풀면,
 $a=3, b=6-a=3$
 $\therefore 2a+b=2\times 3+3=9$

9. 등식 $x^2 - 2x + 3 = a + b(x - 1) + c(x - 1)^2$ 이 x 에 관한 항등식일 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$x^2 - 2x + 3 = a + b(x - 1) + c(x - 1)^2$$

$$x = 1 \text{을 대입하면 } 2 = a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x = 0 \text{을 대입하면 } 3 = a - b + c \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$x = 2 \text{를 대입하면 } 3 = a + b + c \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

①을 ②, ③에 대입하여 정리하면

$$b - c = -1, b + c = 1$$

두 식을 연립하면 $b = 0, c = 1$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 4 + 0 + 1 = 5$$

10. 등식 $(x+1)(x-1)(x^3-x^2+x-1) = x^5-x^4+ax-b$ 가 항상 성립하도록 a, b 값을 정할 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

양변에 $x=1$ 을 대입하면, $0=a-b \cdots \textcircled{1}$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면, $0=-2-a-b \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $a=b=-1$

$\therefore a+b=-2$

11. 다항식 $x^4 - 3x^2 + ax + 7$ 을 $x + 2$ 로 나누면 나머지가 5이다. 이 때, a 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + ax + 7$$

$$f(x) = (x + 2)Q(x) + 5$$

$$\therefore f(-2) = 5$$

$$f(-2) = 16 - 12 - 2a + 7 = 5$$

$$\therefore a = 3$$

12. x 에 관한 삼차식 $x^3 + mx^2 + nx + 1$ 을 $x + 1$ 로 나누면 나머지가 5이고, $x - 2$ 로 나누면 나머지가 3이다. 이 때, 상수 $m - n$ 의 값은?

- ① 4 ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{14}{3}$ ④ 5 ⑤ $\frac{16}{3}$

해설

나머지 정리를 이용한다.

주어진 식에 $x = -1, x = 2$ 를 각각 대입하면

$x = -1$ 일 때,

$$(-1)^3 + m(-1)^2 + n(-1) + 1 = 5 \cdots \textcircled{1}$$

$$x = 2\text{일 때, } (2)^3 + m(2)^2 + n \cdot 2 + 1 = 3 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하면

$$m = \frac{2}{3}, n = -\frac{13}{3}$$

$$\therefore m - n = 5$$

13. $f(x) = 3x^3 + ax^2 + bx - 12$ 가 $x - 1$ 로 나누어 떨어지고, $x + 1$ 로 나누었을 때는 나머지가 -14 이다. 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은?

① -12 ② 12 ③ -20 ④ 20 ⑤ -36

해설

나머지 정리에 의해 $f(1) = 0, f(-1) = -14$

$$f(1) = 3 + a + b - 12 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$f(-1) = -3 + a - b - 12 = -14 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하면, $a = 5, b = 4$

$$\therefore ab = 20$$

14. 다항식 $f(x)$ 에 대하여, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ 일 때, $f(x)$ 를 $(2x-1)(3x-1)$ 로 나눈 나머지를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12x-3$

해설

구하는 나머지를 $ax+b$ 라 하면

$$f(x) = (2x-1)(3x-1)Q(x) + ax + b$$

$x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{3}$ 을 각각 양변에 대입하면

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}a + b = 3, \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}a + b = 1$$

두 식을 연립하여 풀면 $\frac{1}{6}a = 2 \Rightarrow a = 12, b = -3$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $12x-3$

15. 다항식 $2x^{30} + 2x^{28} - x$ 를 $x + 1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 할 때, $Q(x)$ 를 $x - 1$ 로 나누었을 때의 나머지는?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$2x^{30} + 2x^{28} - x = (x + 1)Q(x) + R$$

양변에 $x = -1$ 을 대입 하면,

$$2 + 2 + 1 = R \therefore R = 5$$

양변에 $x = 1$ 을 대입 하면,

$$2 + 2 - 1 = 2Q(1) + 5$$

$$\therefore Q(1) = -1$$

16. x^3 의 항의 계수가 1인 삼차 다항식 $P(x)$ 가 $P(1) = P(2) = P(3) = 0$ 을 만족할 때, $P(4)$ 의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

인수정리에 의해

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

$$P(4) = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

17. 다음 중 인수분해가 잘못된 것을 고르면?

① $(x-y)^2 - xy(y-x) = (x-y)(x-y+xy)$

② $3a^2 - 27b^2 = 3(a+3b)(a-3b)$

③ $64a^3 - 125 = (4a+5)(16a^2 - 20a + 25)$

④ $(x^2 - x)(x^2 - x + 1) - 6 = (x^2 - x + 3)(x+1)(x-2)$

⑤ $2x^2 - 5x + 3 = (x-1)(2x-3)$

해설

$$\begin{aligned} & 64a^3 - 125 \\ &= (4a)^3 - (5)^3 \\ &= (4a-5)(16a^2 + 20a + 25) \end{aligned}$$

18. 자연수 n 에 대하여 다음 등식이 성립할 때, $x^2 - y^2$ 의 값은?

$$[(x+y)^n + (x-y)^n]^2 - [(x+y)^n - (x-y)^n]^2 = 4 \times 3^n$$

- ① 3
- ② 4
- ③ 6
- ④ 7
- ⑤ 9

해설

$$\begin{aligned} & [(x+y)^n + (x-y)^n]^2 - [(x+y)^n - (x-y)^n]^2 \\ &= 4 \times 3^n \\ & 4[(x+y)(x-y)]^n = 4 \times 3^n \\ & 4(x^2 - y^2)^n = 4 \times 3^n \\ & \therefore x^2 - y^2 = 3 \end{aligned}$$

19. 자연수 $N = 35^3 + 3 \cdot 35^2 + 3 \cdot 35 + 1$ 의 양의 약수의 개수를 구하여라.(인수분해공식을 이용하여 푸시오.)

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 49 개

해설

$$a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = (a + 1)^3$$
$$\therefore N = 35^3 + 3 \cdot 35^2 + 3 \cdot 35 + 1$$
$$= (35 + 1)^3 = 36^3 = 2^6 \times 3^6$$
$$\therefore \text{약수의 개수} = (6 + 1) \times (6 + 1) = 49$$

20. 이차항의 계수가 1인 두 이차다항식의 최대공약수가 $x + 2$, 최소공배수가 $x^3 + 3x^2 - 10x - 24$ 라고 한다. 이 때, 두 다항식을 바르게 구한 것은?

- ① $x^2 - x - 6, x^2 + 6x + 8$ ② $x^2 - 3x - 1, x^2 + x + 8$
- ③ $x^2 - 4x + 3, x^2 - x + 2$ ④ $x^2 - x - 2, x^2 - 3x + 8$
- ⑤ $x^2 - 3x - 6, x^2 + 3x + 7$

해설

두 다항식을 $A = aG, B = bG$ (a, b 는 서로소)라고 하면
두 식의 최대공약수가 $x + 2$ 이므로
 $A = a(x + 2), B = b(x + 2)$
따라서, $L = ab(x + 2)$
 $= x^3 + 3x^2 - 10x - 24$ 이다.
이 때, 최소공배수 L 은 최대공약수 $x + 2$ 를 인수로 가지므로
조립제법을 이용하면
 $L = (x + 2)(x - 3)(x + 4)$
 a, b 는 일차식이므로
 $a = x - 3, b = x + 4$ 또는 $a = x + 4, b = x - 3$
따라서, 두 다항식은
 $(x - 3)(x + 2) = x^2 - x - 6$ 과 $(x + 4)(x + 2) = x^2 + 6x + 8$ 이다.

21. x 에 관한 3차식 $x^3+px^2-q^2$, $x^3-(3q-p)x+2(q-1)$ 의 최대공약수가 $x-1$ 일 때, pq 의 값을 구하면?

- ① -2
- ② -1
- ③ 0
- ④ 1
- ⑤ 2

해설

$f(x) = x^3 + px^2 - q^2$,
 $q(x) = x^3 - (3q - p)x + 2(q - 1)$ 라 놓으면
최대공약수가 $x - 1$ 이므로
 $f(1) = 1 + p - q^2 = 0 \cdots \textcircled{1}$
 $g(1) = 1 - (3q - p) + 2(q - 1) = 0$ 에서
 $p - q - 1 = 0 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $q^2 - q - 2 = 0$, $(q - 2)(q + 1) = 0$
(i) $q = 2$ 일 때, $\textcircled{2} p = 3$
 $f(x) = (x - 1)(x + 2)^2$, $g(x) = (x - 1)^2(x + 2)$
 $\therefore G.C.D$ 가 $x - 1$ 이라는 것에 모순
(ii) $q = -1$ 일 때, $\textcircled{2} p = 0$
 $f(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1)$,
 $g(x) = (x - 1)(x^2 + x + 4)$
 $\therefore G.C.D$ 는 $x - 1$
 $\therefore pq = 0$

22. x^2+ax-9 와 x^2+bx+c 의 합은 $2x^2-4x-6$, 최소공배수는 x^3-x^2-9x+9 이다. $a-b+c$ 의 값을 구하여라. (단, a, b, c 는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$A = x^2 + ax - 9 = Gp$
 $B = x^2 + bx + c = Gq$ 라 하면
 $A + B = (p + q)G = 2x^2 - 4x - 6 = 2(x + 1)(x - 3)$
 $L = pqG = x^3 - x^2 - 9x + 9 = x^2(x - 1) - 9(x - 1)$
 $= (x - 1)(x^2 - 9) = (x - 1)(x + 3)(x - 3)$
따라서, $G = x - 3, p = x + 3, q = x - 1$ 이다.
 $\therefore A = (x + 3)(x - 3) = x^2 - 9$
 $B = (x - 1)(x - 3) = x^2 - 4x + 3$
 $\therefore a = 0, b = -4, c = 3$
 $\therefore a - b + c = 7$

23. 복소수 $(1 - xi)(1 - i)$ 가 순허수가 되도록 실수 x 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 1$

해설

$(1 - xi)(1 - i) = (1 - x) + (-1 - x)i$
순허수이려면 실수부가 $0 \Rightarrow 1 - x = 0,$
 $x = 1$

24. $|x-y|+(y-2)i=5x-2-3xi$ 를 만족하는 실수를 x, y 라 할 때, $\frac{x}{y}$ 의 값은? (단, $i^2=-1$)

① $\frac{3}{2}$

② $\frac{2}{3}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{1}{3}$

⑤ $\frac{3}{4}$

해설

(i) $x \geq y$ 일 때,
 $(x-y)+(y-2)i=5x-2-3xi$
 $x-y=5x-2, y-2=-3x$
 $\therefore x=0, y=2(x < y \text{이므로 부적합})$

(ii) $x < y$ 일 때,
 $-(x-y)+(y-2)i=5x-2-3xi$
 $-x+y=5x-2, y-2=-3x$
 $\therefore x=\frac{4}{9}, y=\frac{2}{3}$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{4}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{2}{3}$$

25. 허수단위 i 에 대하여 $i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6$ 을 간단히하면?

① $1 + i$

② $-1 + i$

③ $2i$

④ $2 + i$

⑤ 2

해설

$$\begin{aligned} & i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 \\ &= i + (-1) + (-i) + 1 + i + (-1) \\ &= -1 + i \end{aligned}$$

26. 복소수 z 에 대해 $z = i^m + i^n, m, n$ 은 양의 정수인 z 의 개수를 구하면 몇 개나 될 것인지 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

- ① 6개
- ② 7개
- ③ 8개
- ④ 9개
- ⑤ 10개

해설

$m = 1, n = 1, z = i + i = 2i$

$m = 1, n = 2, z = i - 1$

$m = 1, n = 3, z = i - i = 0$

$m = 1, n = 4, z = i + 1$

$m = 1, n = 5, z = i + i = 2i$

	1	2	3	4
1	$2i$	$i - 1$	0	$i + 1$
2	$-1 + i$	-2	$-1 - i$	0
3	0	$-i - 1$	$-2i$	$-i + 1$
4	$1 + i$	0	$1 - i$	2

$z = 0, 2, -2, 2i, -2i, 1 + i, -1 + i, -1 - i, 1 - i$

∴ 9개

27. $\bar{z} = -z$ 를 만족하는 z 에 대하여 $w = \frac{z-1}{z+1}$ 이라 할 때, $w\bar{w}$ 의 값을 구하여라. (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$z = a + bi$ (a, b 는 실수) 로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$

$\bar{z} = -z$ 이므로 $a - bi = -(a + bi)$

$a - bi = -a - bi$, $2a = 0$

따라서 $a = 0$ 이므로 $z = bi$

$z = bi$ 를 $w = \frac{z-1}{z+1}$ 에 대입하면

$$w = \frac{-1+bi}{1+bi}, \bar{w} = \overline{\left(\frac{-1+bi}{1+bi}\right)} = \frac{-1-bi}{1-bi}$$

$$\therefore \bar{w} = \frac{-1+bi}{1+bi} \cdot \frac{-1-bi}{1-bi}$$

$$= \frac{-1+bi}{1+bi} \cdot \frac{-(1+bi)}{-(-1+bi)}$$

$$= \frac{-1+bi}{1+bi} \cdot \frac{1+bi}{-1+bi} = 1$$

28. 다음 등식을 만족하는 실수 x 의 값을 a , y 의 값을 b 라 할 때, $a+2b$ 의 값을 구하여라.

(단, $\overline{x+yi}$ 는 $x+yi$ 의 켤레복소수이다.)

$$(2+i)(\overline{x+yi})=5(1-i)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$(2+i)(\overline{x+yi})=5(1-i)$$

$$\overline{(x+yi)}=\frac{5(1-i)}{2+i}=1-3i$$

$$x+yi=1+3i$$

$$a=1, \quad b=3$$

$$\therefore a+2b=7$$

29. $x = \frac{1 - \sqrt{2}i}{3}$ 일 때, $3x^2 - 2x$ 의 값은?(단, $i = \sqrt{-1}$)

① $-i$

② -1

③ 0

④ 1

⑤ i

해설

$x = \frac{1 - \sqrt{2}i}{3}$, $3x - 1 = -\sqrt{2}i$ 의 양변을 제곱하면

$9x^2 - 6x + 1 = -2$, $9x^2 - 6x = -3$

양변을 3으로 나누면

$\therefore 3x^2 - 2x = -1$

30. 다음 중 옳은 것은?

① $\sqrt{-3} \times \sqrt{-4} = -\sqrt{12}$

② $\sqrt{-3} \times \sqrt{-4} = \sqrt{12}$

③ $\sqrt{-3} \times \sqrt{4} = -\sqrt{12}$

④ $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-4}} = -\sqrt{\frac{3}{4}}$

⑤ $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{4}} = -\sqrt{\frac{3}{4}}$

해설

② $\sqrt{-3} \times \sqrt{-4} = \sqrt{3}i \times \sqrt{4}i = -\sqrt{12}$

③ $\sqrt{-3} \times \sqrt{4} = \sqrt{3}i \times \sqrt{4} = \sqrt{12}i$

④ $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-4}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$

⑤ $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}}i$

31. $a < 0, b < 0$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 고르면?

① $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$

② $\frac{\sqrt{b}}{a} = \sqrt{\frac{b^2}{a}}$

③ $\sqrt{a^2b^2} = ab$

④ $\sqrt{-ab} = \sqrt{a}\sqrt{bi}$

⑤ $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{bi}$

해설

① $\sqrt{a^2b} = -a\sqrt{b}$

② $\sqrt{\frac{b^2}{a}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^2}} = \frac{\sqrt{b}}{-a}$

③ $\sqrt{a^2b^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2}$
 $= (-a)(-b) = ab$

④ $\sqrt{-ab} = \sqrt{-a}\sqrt{b}$
 $= \sqrt{(-1)a}\sqrt{b}$
 $= -\sqrt{-1}\sqrt{a}\sqrt{b}$
 $= -\sqrt{a}\sqrt{bi}$

⑤ $\sqrt{ab} = -\sqrt{a}\sqrt{b}$

32. 이차방정식 $x^2 - px + 2p + 1 = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 실수 p 의 값을 모두 곱하면?

① -8

② -4

③ 1

④ 4

⑤ 8

해설

$$\begin{aligned} D &= p^2 - 4(2p + 1) \\ &= p^2 - 8p - 4 = 0 \end{aligned}$$

판별식으로부터 나온 p 에 대한 방정식의 근들이 주어진 식이 중근을 갖게 하므로

실수 p 값들의 곱은 근과 계수의 관계에서 -4 이다.

33. x, y 에 대한 이차식 $2x^2 + xy - y^2 - x + 2y + k$ 가 x, y 에 대한 일차식의 곱으로 인수분해 될 때, 상수 k 의 값은 ?

- ① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$2x^2 + xy - y^2 - x + 2y + k$ 를 x 에 대해 정리하면
 $2x^2 + (y - 1)x - y^2 + 2y + k$

이 식이 일차식의 곱으로 인수분해 되려면
판별식이 완전제곱식이 되어야 한다.

$$D = (y - 1)^2 - 4 \times 2(-y^2 + 2y + k)$$

$$= 9y^2 - 18y - 8k + 1$$

이 식이 완전제곱식이므로

$$\frac{D'}{4} = 9^2 + 9(-8k + 1)$$

$$\therefore k = -1$$

해설

일차식의 곱으로 이루어져있으므로, 이차항을 이용하여
 $(2x - y + a)(x + y + b)$ 로 나타낼 수 있다.

전개하면, $2x^2 + xy - y^2 + (a + 2b)x + (a - b)y + ab$ 이고
문제에 주어진 식과 같아야 되므로,

$$\begin{array}{r} a+2b=-1 \\ -) a- \quad b=2 \\ \hline 3b=-3 \end{array}$$

$$\therefore a = 1, \quad b = -1$$

$$\therefore k = ab = -1$$

34. 이차식 $x^2 - xy - 2y^2 - ax - 3y - 1$ 이 x, y 에 관한 두 일차식의 곱으로 인수분해 되는 모든 상수 a 의 값의 합은?

- ① 1
- ② $\frac{3}{2}$
- ③ 2
- ④ $\frac{5}{2}$
- ⑤ 3

해설

(주어진 식)=0이라 놓고 x 에 관하여 정리하면

$$x^2 - (a + y)x - (2y^2 + 3y + 1) = 0$$

근의 공식에서

$$\begin{aligned} x &= \frac{a + y \pm \sqrt{(a + y)^2 + 4(2y^2 + 3y + 1)}}{2} \\ &= \frac{a + y \pm \sqrt{9y^2 + 2(a + 6)y + a^2 + 4}}{2} \end{aligned}$$

주어진 식이 x, y 에 관한 일차식으로 인수분해되려면 근호 안의 식(= D) 이 완전제곱 꼴이어야 한다.

$D = 9y^2 + 2(a + 6)y + a^2 + 4$ 의 판별식이 0 이 되어야 하므로

$$\frac{D'}{4} = (a + 6)^2 - 9(a^2 + 4) = -8a^2 + 12a = 0$$

$$\therefore a = 0 \text{ 또는 } a = \frac{3}{2}$$

$$\therefore 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

35. $x^2 + ax + b = 0$ (a, b 는 실수)의 한 근이 $1 + i$ 일 때, a 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

한 근이 $1 + i$ 이므로,
켈레근 $1 - i$ 도 식의 근.
 $(1 + i) + (1 - i) = -a$
 $\therefore a = -2$

36. 이차방정식 $x^2 - 2x + a + 1 = 0$ 의 두 근이 서로 다른 부호의 실근을 가질 때, a 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a < -1$

해설

(두 근의 곱) = $a + 1 < 0 \quad \therefore a < -1$

37. 다음의 이차방정식에 대한 설명 중 틀린 것은? (단, a, b, c 는 실수이다.)
- ① 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$ 이다.
 - ② 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 $\alpha, \beta, D = b^2 - 4ac$ 라고 하면 $(\alpha - \beta)^2 = \frac{D}{a^2}$ 이다.
 - ③ 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 이 서로 다른 부호의 두 실근을 가지기 위한 필요충분 조건은 $ab < 0$ 이다.
 - ④ 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지면, $x^2 + (a - 2c)x + b - ac$ 도 서로 다른 두 실근을 갖는다.
 - ⑤ 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$ (단, $a \neq 0$)

해설

③ 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 이 서로 다른 부호의 두 실근을 가지기 위한 필요충분 조건은 $ac < 0$ 이다.

38. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - k(k+3)x + k^2 - 1 = 0$ 의 두 근 중 단 하나만이 양이 되기 위한 실수 k 의 조건은?

- ① $-1 < k \leq 1$ ② $-1 < k < 1$ ③ $0 < k \leq 2$
④ $-1 \leq k \leq 0$ ⑤ $-1 \leq k \leq 1$

해설

이차방정식의 두 근을 α, β 라 하자.
(i) 한 근은 양, 다른 근은 음일 때,
 $\alpha\beta = k^2 - 1 < 0, (k+1)(k-1) < 0$
 $\therefore -1 < k < 1$
(ii) 한 근은 양, 다른 근은 0일 때,
 $\alpha + \beta = k(k+3) > 0 \quad \therefore k > 0, k < -3$
 $\alpha\beta = k^2 - 1 = 0 \quad \therefore k = \pm 1$
따라서, $k = 1$
그러므로, (i)과 (ii)에서 $-1 < k \leq 1$

39. 이차함수 $y = 2(x - 1)^2 + 3$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$y = 2(x - 1)^2 + 3$ 의 그래프는 $x = 1$ 일 때 최솟값이 3 이다.

40. $y = -x^2 + 4x - a + 3$ 의 그래프가 x 축과 점 $(3, 0)$ 에서 만날 때, 이차함수의 최댓값은?

① 5

② 4

③ 3

④ 2

⑤ 1

해설

$(3, 0)$ 을 $y = -x^2 + 4x - a + 3$ 에 대입하면

$$0 = -9 + 12 - a + 3$$

$$\therefore a = 6$$

$$y = -x^2 + 4x - 3$$

$$= -(x^2 - 4x + 4 - 4) - 3$$

$$= -(x - 2)^2 + 1$$

$\therefore x = 2$ 일 때, 최댓값 1

41. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 $x = 1$ 에서 최솟값 -1 을 갖고 한 점 $(3, 7)$ 을 지날 때, $a + b + c$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

꼭짓점이 $(1, -1)$ 이므로
 $y = a(x - 1)^2 - 1 = ax^2 - 2ax + a - 1$
 $(3, 7)$ 을 대입하면
 $7 = 9a - 6a + a - 1$
 $a = 2, b = -4, c = 1$
 $\therefore a + b + c = 2 + (-4) + 1 = -1$

42. 다음 이차함수 $y = x^2 - 2x - 2$ 의 x 의 범위가 $-2 \leq x \leq 2$ 일 때, 이 함수의 최댓값은?

① -3 ② -2 ③ 0 ④ 6 ⑤ 9

해설

$y = x^2 - 2x - 2 \Rightarrow y = (x - 1)^2 - 3$
 $-2 \leq x \leq 2$ 이므로 $x = 1$ 에서 최솟값,
 $x = -2$ 에서 최댓값을 갖는다.
 $\therefore$ 최댓값 : $(-2 - 1)^2 - 3 = 6$

43. 함수 $y = (x^2 - 2x + 3)^2 - 2(x^2 - 2x + 3) + 1$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$t = x^2 - 2x + 3$ 으로 놓으면
 $y = t^2 - 2t + 1 = (t - 1)^2 \cdots \textcircled{1}$
또, $t = (x - 1)^2 + 2$ 이므로
 $t \geq 2 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 의 범위에서 $\textcircled{1}$ 의 최솟값은
 $t = 2$ 일 때 1이다.

44. 지면으로부터 초속 30m 로 위로 던진 공의 t 초 후의 높이를 h m 라고 하면 $h = -5t^2 + 30t$ 인 관계가 성립한다. 이 공이 가장 높이 올라갔을 때의 지면으로부터의 높이를 구하여라.

▶ 답 : m

▶ 정답 : 45 m

해설

$h = -5t^2 + 30t$ 에서 $h = -5(t - 3)^2 + 45$ 이다.
따라서 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 45m 이다.

45. 방정식 $x^3 + x^2 + px + q = 0$ 에 대하여 한 근이 $1-i$ 일 때, $p+q$ 값을 구하면?

① -3

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

한 근이 $1-i$ 이므로

켈레복소수인 $1+i$ 도 근이 된다. 나머지 한 근을 α 라 하면 근과 계수와의 관계에 의해

$$-1 = (1-i) + (1+i) + \alpha \therefore \alpha = -3$$

$$p = (1-i)(1+i) - 3(1-i) - 3(1+i)$$

$$\therefore p = -4$$

$$-q = (1-i)(1+i) \cdot (-3) = -6$$

$$\therefore q = 6$$

$$\therefore p+q = -4+6 = 2$$

46. $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, $\omega^3 + \bar{\omega}^3$ 의 값을 구하면? (단, $\bar{\omega}$ 는 ω 의 켈레복소수이다.)

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$x = 1 \text{ 또는 } x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{를 } \omega \text{라 하면}$$

$$\bar{\omega} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

$$\therefore \omega^3 = 1, \bar{\omega}^3 = 1, \omega^3 + \bar{\omega}^3 = 2$$

47. 방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 근을 ω 라 할 때, $\frac{2\omega^2+3\overline{\omega}}{\omega^{100}+1}$ 의 값을 구하면?

(단, $\overline{\omega}$ 는 ω 의 켤레복소수이다.)

- ① 2 ② 3 ③ 5 ④ -3 ⑤ -5

해설

$$\begin{aligned} &x^2+x+1=0 \text{의 두 근은} \\ &\omega, \overline{\omega} \Rightarrow \omega + \overline{\omega} = -1, \omega \overline{\omega} = 1 \\ &\omega^2 + \omega + 1 = 0, \\ &(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0, \omega^3 - 1 = 0, \omega^3 = 1 \\ &\overline{\omega}^2 + \overline{\omega} + 1 = 0, \\ &(\overline{\omega} - 1)(\overline{\omega}^2 + \overline{\omega} + 1) = 0, \\ &\overline{\omega}^3 - 1 = 0, \overline{\omega}^3 = 1 \\ &\frac{2\omega^2+3\overline{\omega}}{\omega^{100}+1} = \frac{2\omega^2+3\overline{\omega}}{(\omega^3)^{33}\omega+1} \\ &= \frac{2\omega^2}{-\omega^2} + \frac{3\overline{\omega}}{-\omega^2} \\ &= -2 + \frac{3\omega\overline{\omega}}{-\omega^3} \\ &= -2 - \frac{3}{1} = -5 \end{aligned}$$

48. 어떤 정육면체의 밑변의 가로와 세로의 길이를 1 cm 줄이고, 세로의 길이와 높이를 각각 2 cm, 3 cm 씩 늘였더니 이 직육면체의 부피가 처음 정육면체의 부피의 $\frac{5}{2}$ 배가 되었다. 처음 정육면체의 한 변의 길이를 구하여라. (단, 정육면체 한 변의 길이는 유리수이다.)

▶ 답 : cm

▷ 정답 : 2 cm

해설

정육면체의 한 변의 길이가 x cm라 하면
조건으로부터 $(x-1)(x+2)(x+3) = \frac{5}{2}x^3$,
 $x^3 + 4x^2 + x - 6 = \frac{5}{2}x^3$,
 $\frac{3}{2}x^3 - 4x^2 - x + 6 = 0$ 에서
 $3x^3 - 8x^2 - 2x + 12 = 0$ 을 풀면 $x = 2$ (cm)

49. 방정식 $x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 세 실근을 α, β, γ 라 할 때, $(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)$ 의 값을 구하면?

- ① 7
- ② 11
- ③ 15
- ④ 19
- ⑤ 21

해설

근과 계수와의 관계에 의해

$\alpha + \beta + \gamma = -2, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -3, \alpha\beta\gamma = -1$
 $x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로 $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = 0$ 이다. $x = 2$ 를 대입하면 $(2 - \alpha)(2 - \beta)(2 - \gamma) = 2^3 - 2^2(\alpha + \beta + \gamma) + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma = 2^3 + 2 \times 2^2 - 2 \times 3 + 1 = 8 + 8 - 6 + 1 = 11$

50. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x+y=-3 \\ xy=-4 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

x, y 는 t 에 대한 이차방정식 $t^2 + 3t - 4 = 0$ 의 두 근이므로

$(t-1)(t+4) = 0$ 에서

$t = 1$ 또는 $t = -4$

따라서, 구하는 해는

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\therefore 1 + (-4) + (-4) + 1 = -6$$