

1. 다음 등식이 x 에 대한 항등식일 때, $a - b + c$ 의 값은?

$$x^2 - 2x + 4 = a(x - 1)(x - 2) + bx(x - 2) + cx(x - 1)$$

- ① 8
- ② 7
- ③ 3
- ④ 0
- ⑤ -3

해설

주어진 등식이 x 에 대한 항등식이므로 x 에 어떤 값을 대입하여도 성립한다.

$x = 0$ 을 대입하면

$$4 = 2a \quad \therefore a = 2$$

$x = 1$ 을 대입하면

$$3 = -b \quad \therefore b = -3$$

$x = 2$ 을 대입하면

$$4 = 2c \quad \therefore c = 2$$

$$\therefore a - b + c = 2 - (-3) + 2 = 7$$

2. 다음 중 옳지 않은 것을 고르면?

① $A > B > 0, C > D > 0$ 이면 $AC > BD$ 이다.

② $A > B, C > D$ 이면 $A + C > B + D$ 이다.

③ $A > B > 0$ 이면 $A^2 > B^2$ 이다.

④ $A > B$ 이면 $\frac{1}{A} < \frac{1}{B}$ 이다.

⑤ $A > 0 > B$ 이면 $\frac{1}{A} > \frac{1}{B}$ 이다.

해설

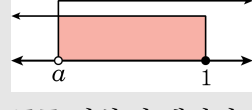
④ 만약 $B < 0 < A$ 인 경우라면 $\frac{1}{A} > \frac{1}{B}$ 가 되어 주어진 문장은 틀리다.

3. 연립부등식 $\begin{cases} 3-x \geq 2 \\ x > a \end{cases}$ 의 해가 존재할 때, 상수 a 의 값의 범위는?

① $a > 1$ ② $a \leq 1$ ③ $a = 1$ ④ $a \geq 1$ ⑤ $a < 1$

해설

$$3 - x \geq 2, \quad x \leq 1$$



공동 범위 가 생기려면 $a < 1$

4. 세 직선 $l: y = -\frac{1}{2}x + 4$, $m: x + 2y - 2 = 0$, $n: 2x - y + 4 = 0$ 에 대한 다음 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ 두 직선 l 과 m 은 평행하다.
- ㉡ 두 직선 m 과 n 은 수직이다.
- ㉢ 두 직선 l 과 n 은 수직이다.

- ① ㉠
- ② ㉢
- ③ ㉠, ㉡
- ④ ㉡, ㉢
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$l: y = -\frac{1}{2}x + 4$
 $m: x + 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1$
 $n: 2x - y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = 2x + 4$
㉠ 두 직선 l 과 m 은 기울기는 같고
y 절편은 다르므로 평행하다. (참)
㉡ 두 직선 m 과 n 의 기울기의 곱은
 $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 = -1$ 이므로 수직이다. (참)
㉢ 두 직선 l 과 n 의 기울기의 곱은
 $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 = -1$ 이므로 수직이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢이다.

5. 두 직선 $2x + y - 4 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$ 의 교점과 점 $(2, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식을 구하면?

- ① $x - y + 1 = 0$ ② $x + y + 1 = 0$ ③ $x - y - 1 = 0$
④ $x - y + 2 = 0$ ⑤ $x + y + 2 = 0$

해설

두 직선 $2x + y - 4 = 0$ 과 $x - 2y + 3 = 0$ 의

교점을 지나는 직선의 방정식은

$$2x + y - 4 + k(x - 2y + 3) = 0 \cdots \textcircled{1}$$

이때, $\textcircled{1}$ 이 점 $(2, 3)$ 을 지나므로 $3 - k = 0$

$$\therefore k = 3$$

$k = 3$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면 $x - y + 1 = 0$

6. 두 점 A(1, 2), B(-1, 4)를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

① $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 4$

② $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 8$

③ $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$

④ $x^2 + (y-3)^2 = 2$

⑤ $x^2 + y^2 = 2$

해설

원의 중심 : $\left(\frac{1+(-1)}{2}, \frac{2+4}{2}\right) = (0, 3)$

반지름 : $\frac{\sqrt{2^2+2^2}}{2}$

∴ 원의 방정식 : $x^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{2})^2$

7. 도형 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$ 를 x 축 방향으로 -2 만큼, y 축 방향으로 1 만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구하면?

① $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$

② $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 5$

③ $(x-3)^2 + (y+3)^2 = 5$

④ $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 5$

⑤ $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 5$

해설

$$x-2=x' \quad y+1=y'$$

라 하고 주어진 식에 대입한다.

$$\Rightarrow (x'+2+1)^2 + (y'-1-2)^2 = 5$$

$$\Rightarrow (x'+3)^2 + (y'-3)^2 = 5$$

$$\Rightarrow (x+3)^2 + (y-3)^2 = 5$$

8. $a^2 + ab + a - b - 2$ 의 인수로 적당한 것은?

① $a - b - 2$

② $a + b - 2$

③ $a + b + 2$

④ $a + 1$

⑤ $b + 1$

해설

a 에 관한 내림차순으로 정리 후 인수분해 한다.

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= a^2 + ab + a - b - 2 \\ &= a^2 + (b + 1)a - b - 2 \\ &= (a + b + 2)(a - 1)\end{aligned}$$

9. $\frac{2006^3 - 1}{2006 \times 2007 + 1}$ 의 값을 구하면?

- ① 2005 ② 2006 ③ 2007 ④ 2008 ⑤ 2009

해설

$a = 2006$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} \text{(준식)} &= \frac{a^3 - 1}{a(a+1) + 1} = \frac{(a-1)(a^2 + a + 1)}{a^2 + a + 1} \\ &= a - 1 = 2005 \end{aligned}$$

10. 연립부등식 $\begin{cases} 3(2x-3) < 9 \\ 2(5-x) \leq 18 \end{cases}$ 의 해 x 에 대하여 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

- ① x 가 될 수 있는 수는 7 개이다.
② x 가 될 수 있는 수 중 자연수의 개수는 2 개이다.
③ x 가 될 수 있는 수 중 0 보다 큰 홀수의 개수는 1 개이다.
④ x 가 될 수 있는 수 중 0 보다 작은 정수의 개수는 4 개이다.
⑤ x 가 될 수 있는 수 중 0 보다 큰 짝수의 개수는 2 개이다.

해설

$$3(2x-3) < 9 \Rightarrow x < 3$$

$$2(5-x) \leq 18 \Rightarrow x \geq -4 \quad x \text{가 될 수 있는 수는 } -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$$

11. 연립부등식 $\begin{cases} 0.3x - 0.5 \leq 0.4 \\ x - 3 > -2(9 + x) \end{cases}$ 를 만족하는 정수 x 는 모두 몇 개인가?

- ① 9개 ② 8개 ③ 7개 ④ 6개 ⑤ 5개

해설

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 0.3x - 0.5 \leq 0.4 \\ x - 3 > -2(9 + x) \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} 3x - 5 \leq 4 \\ x - 3 > -18 - 2x \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} x \leq 3 \\ x > -5 \end{cases} \\ \therefore & -5 < x \leq 3 \end{aligned}$$

12. 연립부등식 $\begin{cases} 3x - 9 < 6x \\ 4x + 12 > 8x + 12a \end{cases}$ 의 해가 존재하도록 하는 상수 a 의 값의 범위는?

① $a < -2$

② $a > -2$

③ $a \leq -2$

④ $a < 2$

⑤ $a > 2$

해설

① $3x - 9 < 6x, x > -3$

② $4x + 12 > 8x + 12a, x < -3a + 3$

해가 존재하려면 $-3a + 3 > -3, a < 2$

13. 다음은 부등식 $ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $m < x < n$ ($m < 0, n < 0$) 일 때, 부등식 $cx^2 + bx + a > 0$ 의 해를 구하는 과정이다.

$ax^2 + bx + c = a(x-m)(x-n) > 0$ 에서
 $m < x < n$ 의 해가 나오려면
 a 는 $(+)$ 이어야 한다.
 또, $b = -a(m+n), c = amn$ 이므로
 $cx^2 + bx + a > 0$ 은 $amnx^2 - a(m+n)x + a > 0$
 여기서 a 는 $(+)$ 이므로
 $mnx^2 - (m+n)x + 1 < 0$
 mn 는 $(-)$ 이므로 위 식을 mn 로
 나누어 정리하면 $\left(x - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right) < 0$
 $\therefore (-) < x < (-)$

위 풀이 과정 중 $(+), (-), (+), (-)$ 에 알맞은 것을 차례로 나열하면?

- ① 양수, 양수, $\frac{1}{m}, \frac{1}{n}$ ② 음수, 음수, $\frac{1}{n}, \frac{1}{m}$
 ③ 음수, 양수, $\frac{1}{m}, \frac{1}{n}$ ④ 양수, 음수, $\frac{1}{n}, \frac{1}{m}$
 ⑤ 음수, 양수, $\frac{1}{n}, \frac{1}{m}$

해설

$a(x-m)(x-n) < 0 \Leftrightarrow m < x < n$ 이므로
 a 는 음수이어야 한다.
 $m < 0, n < 0$ 이므로 $mn > 0$
 즉, 양수이고 $\frac{1}{m} > \frac{1}{n}$ 이므로
 $\left(x - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n} < x < \frac{1}{m}$

14. $ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $-2 < x < 5$ 일 때, $ax^2 - bx + c - 2b > 0$ 의 해를 구하면?

- ① $x < -1, x > 4$ ② $x < -4, x > 1$ ③ $-1 < x < 4$
④ $-4 < x < 1$ ⑤ $-4 < x < -1$

해설

$ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $-2 < x < 5$ 이면

$a < 0$, 해가 $-2 < x < 5$ 인 부등식은

$$(x+2)(x-5) < 0$$

$x^2 - 3x - 10 < 0$ 에 a 를 곱하면

$$ax^2 - 3ax - 10a > 0 \quad (\because a < 0)$$

$\therefore b = -3a, c = -10a$ 를

$ax^2 - bx + c - 2b > 0$ 에 대입

$$\therefore ax^2 + 3ax - 10a + 6a > 0$$

$$ax^2 + 3ax - 4a > 0$$

(a 로 나누면 $a < 0$ 이므로)

$$x^2 + 3x - 4 < 0, (x-1)(x+4) < 0$$

$$\therefore -4 < x < 1$$

15. 이차방정식 $(2+k)x^2 + 4x - (1+k) = 0$ 이 실근을 갖기 위한 실수 k 값의 범위는?

① $k \geq 1$

② $k \leq -2$

③ k 는 모든 실수

④ k 는 없다.

⑤ $k \neq -2$ 인 모든 실수

해설

이차방정식이므로 $k \neq -2$

실근을 가지려면 판별식이 0보다 크거나 같아야 하므로

$$D' = 2^2 + (k+2)(k+1) \geq 0$$

$$k^2 + 3k + 6 \geq 0$$

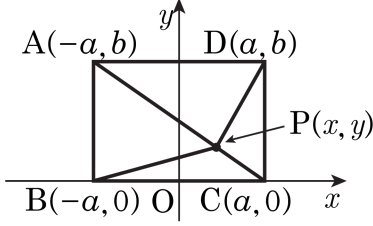
$$k^2 + 3k + 6 = \left(k + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} \geq 0 \text{ 이므로}$$

모든 실수 k 에 대해 성립.

$\therefore k \neq -2$ 인 모든 실수

16. 다음은 직사각형 ABCD와 임의의 점 P에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{DP}^2$ 이 성립함을 보인 것이다. ㉠ ~ ㉣에 들어갈 말 중 옳지 않은 것은?

다음 그림과 같이 직사각형 ABCD의 한 변 BC를 x 축, $\overline{BC}$ 의 수직이등분선을 y 축으로 잡으면
 $A(-a, b)$, $B(-a, 0)$, $C(a, 0)$, $D(a, b)$ 로 놓을 수 있다.



이때, 점 P의 좌표를 $P(x, y)$ 라고 하면
 $\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 =$ ㉠ + ㉡
 $= 2(x^2 + y^2 + a^2 - by) + b^2 \cdots$ ㉢
 $\overline{BP}^2 + \overline{DP}^2 =$ ㉣ + ㉤
 $= 2(x^2 + y^2 + a^2 - by) + b^2 \cdots$ ㉥
 ㉢, ㉥로부터 $\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 =$ ㉦

- ㉠ ㉠ : $(x + a)^2 + (y + b)^2$
 ㉡ ㉡ : $(x - a)^2 + y^2$
- ㉢ ㉢ : $(x + a)^2 + y^2$
 ㉣ ㉣ : $(x - a)^2 + (y - b)^2$
- ㉤ ㉤ : $\overline{BP}^2 + \overline{DP}^2$

해설

$A(-a, b)$, $B(-a, 0)$, $C(a, 0)$, $D(a, b)$, $P(x, y)$ 이므로
 $\overline{AP}^2 = (x + a)^2 + (y - b)^2 \cdots$ (가)
 $\overline{CP}^2 = (x - a)^2 + y^2 \cdots$ (나)
 $\overline{BP}^2 = (x + a)^2 + y^2 \cdots$ (다)
 $\overline{DP}^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 \cdots$ (라)
 $\therefore \overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{DP}^2 \cdots$ (마)

17. $\triangle ABC$ 의 꼭짓점 A의 좌표가 (5, 4)이고, 선분 AB의 중점의 좌표가 (-1, 3)이고 무게중심의 좌표가 (1, 2)일 때, 꼭짓점 C의 좌표를 구하면?

- ① (3, -1)
- ② (4, -1)
- ③ (5, -1)
- ④ (4, 0)
- ⑤ (5, 0)

해설

B(x, y), C(a, b)라고 하면

중점 $(-1, 3) = \left(\frac{x+5}{2}, \frac{y+4}{2}\right)$ 에서

$x+5 = -2, x = -7, y+4 = 6, y = 2$

$\therefore B(x, y) = (-7, 2)$

$G = \left(\frac{5-7+a}{3}, \frac{4+2+b}{3}\right) = (1, 2)$ 에서

$a-2 = 3, a = 5, b+6 = 6, b = 0$

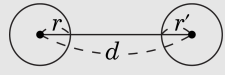
$\therefore C(5, 0)$

18. 두 원 $C_1 : x^2 + y^2 = r^2$, $C_2 : (x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 4$ 에 대하여 공통 접선의 개수가 4개가 되도록 하는 양의 정수 r 의 개수는?

① 4개 ② 5개 ③ 6개 ④ 7개 ⑤ 8개

해설

공통접선이 4개인 경우 $r + r' < d$ 인 경우



$$C_1 \Rightarrow (0, 0) \quad r = r'$$

$$C_2 \Rightarrow (6, 8) \quad r = 2$$

$$\text{중심거리 } (d) = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

$$\therefore r + 2 < 10$$

$$r < 8 \quad (\text{단, } r > 0)$$

r 의 갯수는 $r = 1, 2, 3 \dots 7$ 이므로 7개이다.

19. 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$ 에 의하여 잘리는 x 축 위의 선분의 길이를 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

해설

원이 x 축과 만나는 점은 $y = 0$ 을 대입하여 계산한다.

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1, 3$$

$\therefore x$ 축 위의 선분의 길이 : 2

20. $x - \frac{1}{x} = 1$ 일 때, $x^5 + \frac{1}{x^5}$ 의 값은 ?

① $\pm 6\sqrt{5}$

② $\pm 5\sqrt{5}$

③ $\pm 3\sqrt{5}$

④ $\pm 2\sqrt{5}$

⑤ $\pm \sqrt{5}$

해설

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) \text{에서}$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 = 3 \text{에서}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 5$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = \pm \sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= \pm 5\sqrt{5} - 3(\pm \sqrt{5}) = \pm 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\therefore x^5 + \frac{1}{x^5} = 3(\pm 2\sqrt{5}) - (\pm \sqrt{5}) = \pm 5\sqrt{5}$$

21. 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라 할 때, $xf(x)+3$ 을 $x-1$ 로 나눈 몫과 나머지를 차례로 바르게 나열한 것은?

① $Q(x), R$

② $Q(x), R+3$

③ $xQ(x), R$

④ $xQ(x), R+3$

⑤ $xQ(x)+R, R+3$

해설

$$f(x) = (x-1)Q(x) + R$$

$$\begin{aligned}xf(x) + 3 &= (x-1)xQ(x) + Rx + 3 \\&= (x-1)xQ(x) + R(x-1) + R + 3 \\&= (x-1)\{xQ(x) + R\} + R + 3\end{aligned}$$

$$\therefore \text{몫} : xQ(x) + R, \text{나머지} : R + 3$$

22. 이차방정식 $ax(x-1)+bx(x-1)+c(x^2+1)=0$ 의 두근을 α, β 라 할 때, $\frac{c}{(\alpha-1)(\beta-1)}$ 의 값은?

- ① $\frac{a+b+c}{2}$
- ② $a+b+c$
- ③ $ab+bc+ca$
- ④ $\frac{ab+bc+ca}{2}$
- ⑤ abc

해설

(I) 주어진 식을 정리하면
 $(a+b+c)x^2-(a+b)x+c=0 \quad (a+b+c \neq 0)$
 $\alpha+\beta=\frac{a+b}{a+b+c}, \alpha\beta=\frac{c}{a+b+c}$
(II) (준식) $=\frac{c}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}$
 $=\frac{c(a+b+c)}{c-(a+b)+(a+b+c)}$
 $=\frac{c(a+b+c)}{2c}=\frac{a+b+c}{2}$

23. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2kx + 6k = 0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, $\omega^2 + \bar{\omega}^2 = 16$ 이다. 실수 k 의 값은? (단, $\bar{\omega}$ 는 ω 의 켤레복소수이다.)

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

방정식 $x^2 + 2kx + 6k = 0$ 이 허근을 가지므로

$$\frac{D}{4} = k^2 - 6k < 0, \quad k(k - 6) < 0$$

$$\therefore 0 < k < 6$$

한편, ω 가 허근이고 계수가 실수이므로 주어진 이차방정식의 다른 한 근은 $\bar{\omega}$ 이다.

따라서 근과 계수와의 관계에 의하여

$$\omega + \bar{\omega} = -2k, \quad \omega\bar{\omega} = 6k \text{ 이므로}$$

$$\omega^2 + \bar{\omega}^2 = (\omega + \bar{\omega})^2 - 2\omega\bar{\omega} = (-2k)^2 - 12k$$

$$= 4k^2 - 12k$$

$$4k^2 - 12k = 16,$$

$$\text{즉, } k^2 - 3k - 4 = 0 \text{ 에서}$$

$$(k + 1)(k - 4) = 0 \quad \therefore k = -1 \text{ 또는 } k = 4$$

$$0 < k < 6 \text{ 이므로 } k = 4$$

24. $3x-8 < -(2x+1)$, $\frac{x+3}{4} \leq \frac{x-1}{2}$, $0.6(1-2x) \leq 0.3x+1.2$ 을 만족하는 x 의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$$3x - 8 < -(2x + 1)$$

$$\therefore x < 1.4$$

$$\frac{x+3}{4} \leq \frac{x-1}{2}$$

$$\therefore 5 \leq x$$

$$0.6(1-2x) \leq 0.3x+1.2, \text{ } x \text{는 정수}$$

$$\therefore -0.4 \leq x$$

따라서 모두 만족하는 x 는 없으므로 0개이다.

25. 제주시에서 남서쪽 1100 km 해상에 태풍의 중심이 있다. 이 태풍은 중심에서 반지름 50 km 이내가 폭풍우권이며, 30 km/h의 속도로 북동진한다. 지름도 10 km/h씩 넓어진다. 제주시가 폭풍우권 내에 들어있는 시간은? (단, 제주시는 점으로 생각하고, 태풍은 직진한다고 가정한다.)

- ① 15 시간 ② 16 시간 ③ 30 시간
④ 46 시간 ⑤ 50 시간

해설

$$|-1100 + 30x - 0| \leq 50 + 5x$$

$$-50 - 5x \leq -1100 + 30x \leq 50 + 5x$$

$$25x \leq 1150 \text{에서 } x \leq 46$$

$$35x \geq 1050 \text{에서 } x \geq 30$$

$$\therefore 30 \leq x \leq 46$$

따라서, 제주시가 폭풍우권 내에 들어있는 시간은 $46 - 30 = 16$ (시간)이다.

26. 두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$ 의 교점을 지나고, 원점에서부터의 거리가 1 인 직선의 방정식을 $ax+by+c=0$ 이라고 할 때, $a+b+c$ 의 값은?

- ① -2
- ② -1 또는 2
- ③ 4
- ④ -2 또는 4
- ⑤ 0 또는 4

해설

두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은 $x-2y+3+k(x-y+1)=0$ 으로 나타낼 수 있다. 이 식을 정리하면 $(1+k)x+(-2-k)y+(3+k)=0 \cdots \textcircled{1}$ 원점에서 이 직선까지의 거리가 1 이므로 $\frac{3+k}{\sqrt{(1+k)^2+(-2-k)^2}}=1$ 양변에 제곱하여 정리하면 $(3+k)^2=(1+k)^2+(-2-k)^2, k^2=4$ $\therefore k=\pm 2$ 이것을 ①에 대입하여 정리하면 $3x-4y+5=0$ 또는 $x-1=0$ 따라서 $a+b+c$ 는 0 또는 4

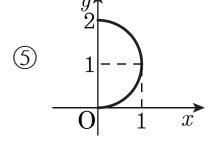
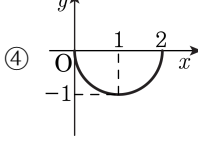
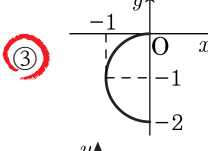
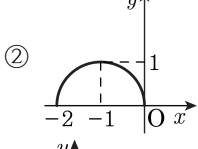
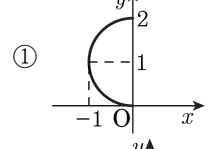
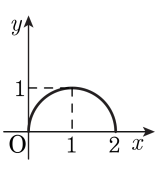
27. 원 $x^2 + y^2 + 2ax + 2y - 6 = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 + 2x - 2ay - 2 = 0$ 의 둘레를 이등분할 때, a^2 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 9

해설

원 $x^2 + y^2 + 2ax + 2y - 6 = 0$ 이
원 $x^2 + y^2 + 2x - 2ay - 2 = 0$ 의
둘레를 이등분하려면
두 원의 교점을 지나는 직선이
원 $x^2 + y^2 + 2x - 2ay - 2 = 0$ 의 중심을 지나야
한다. 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은
 $(x^2 + y^2 + 2ax + 2y - 6) - (x^2 + y^2 + 2x - 2ay - 2) = 0$
 $2(a - 1)x + 2(a + 1)y - 4 = 0$
 $\therefore (a - 1)x + (a + 1)y - 2 = 0 \dots \textcircled{1}$
또, 원 $x^2 + y^2 + 2x - 2ay - 2 = 0$ 을
표준형으로 바꾸면,
 $(x + 1)^2 + (y - a)^2 = a^2 + 3$ 이므로
중심의 좌표는 $(-1, a)$ 이다. 이 때, 직선 $\textcircled{1}$ 이
점 $(-1, a)$ 를 지나야 하므로 $-(a - 1) + a(a + 1) - 2 = 0$
 $a^2 - 1 = 0,$
 $\therefore a^2 = 1$

28. 도형 $f(x, y) = 0$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때,
 도형 $f(-y, -x) = 0$ 의 그래프로 옳은 것은?



해설

도형 $f(-y, -x) = 0$ 의 그래프는
 도형 $f(x, y) = 0$ 의 그래프를
 직선 $y = -x$ 에 대하여 대칭이동 한 것이다.

29. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $\frac{a-b+c}{a+b+c} = \frac{-a-b+c}{a-b-c}$ 일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?
- ① 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형
 - ② 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형
 - ③ 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형
 - ④ $a = b$ 인 이등변삼각형
 - ⑤ $b = c$ 인 이등변삼각형

해설

$$\begin{aligned} \frac{a-b+c}{a+b+c} &= \frac{-a-b+c}{a-b-c} \text{에서} \\ (a-b+c)(a-b-c) &= (a+b+c)(-a-b+c) \\ (a-b+c)(a-b-c) + (a+b+c)(a+b-c) &= 0 \\ (\text{좌변}) \\ &= \{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\} + \{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\} \\ &= (a-b)^2 - c^2 + (a+b)^2 - c^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2 - c^2 + a^2 + 2ab + b^2 - c^2 \\ &= 2a^2 + 2b^2 - 2c^2 \\ \text{따라서, } 2a^2 + 2b^2 - 2c^2 &= 0 \text{ 이므로 } a^2 + b^2 = c^2 \\ \text{그러므로 이 삼각형은 빗변의 길이가 } c \text{인 직각삼각형이다.} \end{aligned}$$

30. 다음 중 $\left(\frac{997}{1000}\right)^3 + \left(\frac{3}{1000}\right)^3 - 1$ 의 값과 같은 것은?

- ① $\frac{3^2 \times 997^3}{10}$ ② $\frac{3^2 \times 997^6}{10}$ ③ $-\frac{3^2 \times 997^3}{10}$
 ④ $-\frac{3^2 \times 997}{10^6}$ ⑤ $-\frac{3^2 \times 997^9}{10}$

해설

주어진 식에서 $\frac{997}{1000}$ 과 $\frac{3}{1000}$ 을 더해보면 $\frac{997+3}{1000} = 1$ 이므로

$a = \frac{997}{1000}$, $b = \frac{3}{1000}$, $c = -1$ 이라 하면

$a + b + c = 0$ 이 된다.

따라서 $a + b + c = 0$ 이므로

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \text{ 에서 } a^3+b^3+c^3 = 3abc$$

임을 이용하면

$$a^3 + b^3 + c^3 = \left(\frac{997}{1000}\right)^3 + \left(\frac{3}{1000}\right)^3 + (-1)^3 \text{ 의 값은}$$

$$3abc = 3 \times \frac{997}{1000} \times \frac{3}{1000} \times (-1) \text{ 와 같으므로}$$

구하는 값은

$$3 \times \frac{997}{1000} \times \frac{3}{1000} \times (-1) = -\frac{3^2 \times 997}{10^6}$$

31. 실수 x, y, z 가 $x + y + z = 6$, $xy + yz + zx = 9$ 를 만족할 때 x 의 최대값을 M , 최소값을 m 이라 한다. 이 때 $M - m$ 의 값을 구하면 ?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$y + z = 6 - x$,
 $yz = 9 - x(y + z) = 9 - x(6 - x) = (x - 3)^2$
실수 y, z 를 두 근으로 하는 이차방정식을 만들면
 $t^2 - (6 - x)t + (x - 3)^2 = 0$
 $D = (6 - x)^2 - 4(x - 3)^2 \geq 0$ 에서 $x(x - 4) \leq 0$
 $\therefore 0 \leq x \leq 4$
 $M = 4, m = 0 \quad \therefore M - m = 4$

32. 실계수 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 α 는 허수이고, $\frac{\beta^2}{\alpha}$ 은 실수이다. 이 때, $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3$ 의 값은?

- ① 0
- ② -1
- ③ 1
- ④ i
- ⑤ $-i$

해설

α 가 근이므로 $\bar{\alpha}$ 도 근이다.
이차방정식은 두 근을 가지므로
 $\beta = \bar{\alpha}, \bar{\beta} = \alpha \cdots \cdots$ ①
 $\frac{\beta^2}{\alpha}$ 이 실수이므로, $\frac{\beta^2}{\alpha} = \overline{\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)}$
 $\therefore \bar{\alpha}\beta^2 = \alpha\bar{\beta}^2$
①에 의하여 $\beta\beta^2 = \alpha\alpha^2$
 $\therefore \beta^3 = \alpha^3$
 $\therefore \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 = \frac{\beta^3}{\alpha^3} = 1$

33. $f(x) = x^3 - p$, $g(x) = x^3 - 2x$ 에 대하여 방정식 $f(x) = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라고 할 때, $g(\alpha)g(\beta)g(\gamma)$ 의 값을 p 로 바르게 나타낸 것은?
- ① p^3 ② $-p^3 + 2p$ ③ $-3p^3$
④ $3p^3 - 6p$ ⑤ $p^3 - 8p$

해설

$x^3 - p = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 하면
 $\alpha^3 - p = 0, \beta^3 - p = 0, \gamma^3 - p = 0$
 $\alpha + \beta + \gamma = 0, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0,$
 $\alpha\beta\gamma = p$ 이 성립한다.
이 때,
 $g(\alpha)g(\beta)g(\gamma) = (\alpha^3 - 2\alpha)(\beta^3 - 2\beta)(\gamma^3 - 2\gamma) = (p - 2\alpha)(p - 2\beta)(p - 2\gamma)$
 $= p^3 - 2(\alpha + \beta + \gamma)p^2 + 4(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)p - 8\alpha\beta\gamma = p^3 - 8p$

34. a, b, c 는 실수이고, $a(a+b+c) > 0$, $a(b+2a) < 0$ 을 만족시킬 때,
 ab 가 $0, b(a+b+c)$ 나 0 이다. 가, 나에 알맞은 기호를 차례로 쓰면?

- ①

<, <
- ②

<, >
- ③

>, >
- ④

>, <
- ⑤

결정할 수 없다.

해설

$a(a+b+c) > 0$ 에서 $a \neq 0, a+b+c \neq 0$ 임을 알 수 있다.
한편 $a(b+2a) = ab + 2a^2 < 0$ 에서 $ab < -2a^2 < 0$ 이므로 $ab < 0$ 이다.
또 $ab < 0$ 이므로 $ab(a+b+c)^2 < 0$ 에서 $\{a(a+b+c)\} \{b(a+b+c)\} < 0$ 이다.
그런데, $a(a+b+c) > 0$ 이므로 $b(a+b+c) < 0$ 이다.

35. 평면 위에서 질량이 같은 질점들을 한 점을 중심으로 가장 쉽게 회전시키려면 각 점으로부터 회전중심까지의 거리의 제곱의 합이 가장 작아야 한다. 평면 위의 점 $O(0, 0)$, $A(2, 0)$, $B(2, 1)$ 에 각각 질량이 같은 질점이 놓여 있을 때 이들 세 질점을 가장 쉽게 회전시키는 회전중심 P 의 좌표는?

- ① $P(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$
- ② $P(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$
- ③ $P(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$
- ④ $P(1, \frac{1}{2})$
- ⑤ $P(2, \frac{1}{2})$

해설

$P(x, y)$ 라고 하면 $\overline{OP}^2 + \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = x^2 + y^2 + (x-2)^2 + y^2 + (x-2)^2 + (y-1)^2 = 3x^2 - 8x + 3y^2 - 2y + 9 = 3\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + 3\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{10}{3}$

이 값을 최소가 되게 하는 점 $P(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ 는 $\triangle ABC$ 의 무게중심이다.