**1.** $x$의 범위가 $-3 \le x \le 2$ 일 때, 이차함수 $y = x^2 - 2x - 1$ 의 최댓값은 $M$ , 최솟값은 $m$ 이다. $M + m$ 의 값은?

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

해설

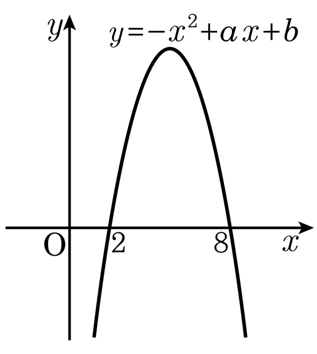
$y = x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 2$

$\Rightarrow m : x = 1$ 일 때 : $-2$,

$M : x = -3$ 일 때 : $14$

$\therefore m + M = 12$

**2.** 다음 그림과 같은 이차함수의 그래프에서 최댓값을 구하여라.




▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$y=-x^2+ax+b$ 가 $(2,\ 0)$ , $(8,\ 0)$ 을 지나므로 이차함수의 식을 구할수 있다.

$$\begin{aligned} y &= -(x-2)(x-8) \\ &= -x^2+10x-16 \\ &= -(x^2-10x+25)+25-16 \\ &= -(x-5)^2+9 \end{aligned}$$

$\therefore x=5$ 일 때 최댓값은 9 이다.

**3.** 이차함수 $y = x^2 + 2ax + b$ 가 두 점 (1, 8), (−1, 4) 를 지날 때, 이차함수의 최댓값 또는 최솟값은?

① 최댓값 : 4
② 최솟값 : 4
③ 최댓값 : 1, 최솟값 : 3
④ 최댓값 : 6
⑤ 최솟값 : 1

해설

$y = x^2 + 2ax + b$가 두 점 (1, 8), (−1, 4) 를 지나므로
$8 = 1 + 2a + b, 4 = 1 - 2a + b$
두 식을 연립하여 풀면
$a = 1, b = 5$
$\therefore y = x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4$
따라서 $x = -1$ 일 때, 최솟값은 4

**4.** 이차함수 $y = -x^2 + 2kx + 4k$ 의 최댓값이 5 일 때, 상수 $k$ 의 값을 구하면? (단, $k > 0$ )

① 7 ② 5 ③ 1 ④ 9 ⑤ 3

해설

$y = -x^2 + 2kx + 4k$
$= -(x^2 - 2kx + k^2 - k^2) + 4k$
$= -(x - k)^2 + (k^2 + 4k)$

최댓값 $k^2 + 4k = 5$ , $k^2 + 4k - 5 = 0$
$k = 1$ 또는 $k = -5$ 에서 $k > 0$ 이므로 $k = 1$

**5.** 이차함수 $y = -x^2 + 4x + k - 3$ 의 최댓값이 5 일 때, $k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$y = -x^2 + 4x + k - 3$
$= -(x-2)^2 + 4 + k - 3$
$= -(x-2)^2 + 1 + k$

$x = 2$ 일 때, 최댓값 $1 + k$ 를 가지므로 $1 + k = 5$

$\therefore k = 4$

**6.** 이차함수 $y=x^2-2ax+3$ 이 $x=-3$ 에서 최솟값 $m$ 을 가질 때, $a-m$ 의 값은?

① $-9$ ② $6$ ③ $3$ ④ $-3$ ⑤ $-6$

해설

$y=x^2-2ax+3=(x-a)^2-a^2+3$

$x=-3$ 에서 최솟값 $m$ 을 가지므로

$a=-3, -a^2+3=m,\ m=-6$

$\therefore a-m=-3-(-6)=3$

**7.** 이차함수 $y = -\frac{1}{2}x^2 + kx - 11$ 의 그래프에서 $x$ 의 값이 증가할 때, $y$ 의 값도 증가하는 $x$ 값의 범위가 $x < -5$ 일 때, $k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-5$

해설

주어진 조건에서 그래프의 축의 방정식은 $x = -5$ 이다.

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}x^2 + kx - 11 \\ &= -\frac{1}{2}(x+5)^2 + \frac{3}{2} \\ &= -\frac{1}{2}x^2 - 5x - 11 \end{aligned}$$

$\therefore\ k = -5$

**8.** $-2 \le x \le 0$ 에서 이차함수 $y = -2x^2 + 4x + a + 1$ 이 최댓값 1 을 가질 때, 상수 $a$ 의 값은?

① $-1$　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

**해설**

$y = -2x^2 + 4x + a + 1 = -2(x-1)^2 + a + 3$ 이
이차함수의 그래프의 꼭짓점의 $x$ 좌표 1 이
$x$의 값의 범위 $-2 \le x \le 0$ 에 속하지 않으므로
주어진 이차함수는 $x = -2$ 일 때 최솟값을 갖고
$x = 0$ 일 때 최댓값을 갖는다.
최댓값이 1 이므로 $a + 1 = 1$ 　 $\therefore a = 0$

**9.** 이차함수 $y = 2x^2 + 4ax - 4a$ 의 최솟값을 $m$이라고 할 때, $m$의 최댓값을 구하여라. (단, $a$는 상수이다.)

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$y = 2x^2 + 4ax - 4a = 2(x + a)^2 - 2a^2 - 4a$

$\therefore m = -2a^2 - 4a = -2(a + 1)^2 + 2$

따라서 $m$의 최댓값은 2 이다.

**10.** 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2a - 5$ 의 최솟값을 $m$ 이라고 할 때, $m$ 의 최댓값을 구하면?

① $-1$ ② $-2$ ③ $-3$ ④ $-4$ ⑤ $-5$

해설

$y = x^2 - 2ax - 2a - 5$
$= (x - a)^2 - a^2 - 2a - 5$

$y$ 의 최솟값 : $m = -a^2 - 2a - 5$
$= -(a + 1)^2 - 4$

$m$ 의 최댓값 : $-4$

**11.** $-1 \le x \le 1$ 에서 함수 $y = (x^2 - 2x + 2)^2 - 4(x^2 - 2x + 2) + 1$ 의 최댓값을 $M$ , 최솟값을 $m$ 이라 할 때, $M \times m$ 의 값은?

① 18 ② 9 ③ 7 ④ $-9$ ⑤ $-18$

해설

$(x^2 - 2x + 2) = t$ 로 치환하면,
$t^2 - 4t + 1 = (t - 2)^2 - 3$ .
$t$의 범위는 $x$ 에 의해 $1 \le t \le 5$ 가 된다.

$$\begin{cases} t = 2\text{일때}, \ y = -3 \\ t = 5\text{일때}, \ y = 6 \end{cases}$$

$\therefore\ M \times m = -18$

**12.** 함수 $f(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x + 3) + 3x^2 - 6x$ 의 최솟값은?

① $-2$　　② $-1$　　③ $0$　　④ $1$　　⑤ $2$

해설

$x^2 - 2x + 2 = t$ 로 놓으면
$t = (x-1)^2 + 1 \geq 1$ 이고

$$\begin{aligned} f(x) = g(t) &= t(t+1) + 3t - 6 \\ &= t^2 + 4t - 6 \\ &= (t+2)^2 - 10 \ (t \geq 1) \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은
$g(1) = (1+2)^2 - 10 = -1$

**13.** 합이 26 인 두 수가 있다. 두 수의 곱이 최대가 되는 두 수를 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

▷ 정답 : 13

해설

두 수를 각각 $x$ , $26 - x$ 라고 하면,
$y = x(26 - x)$
$= -x^2 + 26x$
$= -(x - 13)^2 + 169$
$x = 13$ 일 때, 최댓값 169를 가진다.
$26 - x = 13$ 이므로 구하는 두 수는 13, 13이다.

**14.** $x, y, z$가 실수일 때, $x^2+y^2+z^2+2x-6y-8z+25$의 최솟값은?

① $-5$　② $-3$　③ $-1$　④ $1$　⑤ $3$

해설

$x^2+y^2+z^2+2x-6y-8z+25$
$=(x+1)^2+(y-3)^2+(z-4)^2-1$
이 때, $x, y, z$가 실수이므로
$(x+1)^2 \geq 0,\ (y-3)^2 \geq 0,\ (z-4)^2 \geq 0$
$\therefore x^2+y^2+z^2+2x-6y-8z+25 \geq -1$
따라서 $x=-1,\ y=3,\ z=4$일 때,
주어진 식의 최솟값은 $-1$이다.

**15.** $x, y$가 실수일 때, $-x^2-y^2-4x+6y-12$의 최댓값은?

① $-2$ ② $-1$ ③ $0$ ④ $1$ ⑤ $2$

해설

$-x^2-y^2-4x+6y-12=-(x+2)^2-(y-3)^2+1$

이 때, $x, y$가 실수이므로

$(x+2)^2 \geq 0,\ (y-3)^2 \geq 0$

$\therefore -x^2-y^2-4x+6y-12 \leq 1$

따라서 $x=-2,\ y=3$일 때

주어진 식의 최댓값은 $1$이다.

**16.** $x^2+y^2=5$를 만족시키는 실수 $x, y$에 대하여 $2x-y$는 $x=\alpha, y=\beta$에서 최댓값 $m$을 갖는다. 이때, $m+\alpha+\beta$의 값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$2x-y=k$로 놓으면
$y=2x-k \cdots$ ㉠
㉠을 $x^2+y^2=5$에 대입하면
$x^2+(2x-k)^2=5$
$\therefore 5x^2-4kx+k^2-5=0 \cdots$ ㉡
㉡을 $x$에 대한 이차방정식으로 보면
$x$가 실수이므로
$\frac{D}{4}=4k^2-5(k^2-5)\ 0$ , $k^2 \leq 25$
$\therefore -5 \leq k \leq 5$
따라서 $k$의 최댓값은 5이다.
이 때의 $x, y$의 값은
㉡에서 $5x^2-20x+20=0$ , $5(x-2)^2=0 \therefore x=2$
㉠에서 $y=4-5=-1$
따라서, $m=5, \alpha=2, \beta=-1$이므로
$m+\alpha+\beta=6$

**17.** 실수 $x, y$가 $x^2 + 2y^2 - 2xy - 4 = 0$을 만족시킬 때, $x$의 최댓값과 $y$의 최댓값의 합은?

① $2\sqrt{2} - 1$　② $2\sqrt{2} + 1$　③ $2\sqrt{2} + 2$
④ $\sqrt{2} + 4$　⑤ $\sqrt{2} + 5$

**해설**

$x^2 + 2y^2 - 2xy - 4 = 0$을
( i ) $x$에 대한 내림차순으로 정리하면
$x^2 - 2yx + 2y^2 - 4 = 0$에서 $x$가 실수이므로
$\frac{D}{4} = y^2 - (2y^2 - 4) \geq 0,\ y^2 \leq 4$
$\therefore\ -2 \leq y \leq 2$
따라서, $y$의 최댓값은 2이다.
( ii ) $y$에 대한 내림차순으로 정리하면
$2y^2 - 2xy + x^2 - 4 = 0$에서 $y$가 실수이므로
$\frac{D'}{4} = x^2 - 2(x^2 - 4) \geq 0,\ x^2 \leq 8$
$\therefore\ -2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}$
따라서, $x$의 최댓값은 $2\sqrt{2}$이다.
( i ), ( ii )에 의해 구하는 합은 $2\sqrt{2} + 2$

**18.** 둘레의 길이가 28cm 인 직사각형에서 넓이를 최대가 되게 하려면 가로와 세로의 길이를 각각 얼마로 하면 되겠는가?

① 가로 6 cm, 세로 8 cm
② 가로 7 cm, 세로 7 cm
③ 가로 8 cm, 세로 9 cm
④ 가로 8 cm, 세로 8 cm
⑤ 가로 7 cm, 세로 9 cm

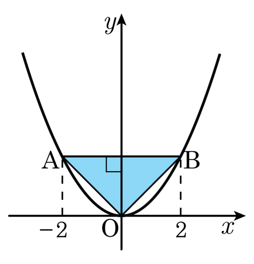
해설

가로의 길이를 $x$ cm , 세로의 길이를 $(14-x)$ cm , 넓이를 $y\,\text{cm}^2$ 라 하면

$$\begin{aligned} y &= x(14-x) \\ &= -x^2+14x \\ &= -(x^2-14x+49-49) \\ &= -(x-7)^2+49 \end{aligned}$$

따라서 $x=7$ , 즉 가로 7 cm, 세로 7 cm 일 때 최댓값 $49\,\text{cm}^2$ 를 가진다

**19.** 다음 그림은 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2$ 의 그래프이다. 이때, $\triangle$AOB 의 넓이는 얼마인가?




① 2　② 4　③ 6

④ 8　⑤ 10

해설

$\overline{AB} = 4$ 이고,

$x = 2$ 를 대입하면 $y = 2$ 이므로

$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$

**20.** 둘레의 길이가 24 인 철사를 구부려서 부채꼴 모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이를 $y$ 라고 할 때, 부채꼴의 넓이의 최댓값을 구하면?

① 18　　② 20　　③ 30　　④ 32　　⑤ 36

해설

반지름의 길이를 $x$ 라 하면 호의 길이는 $24-2x$ 이다.

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}\times x\times(24-2x) \\ &= x(12-x) \\ &= -x^2+12x \\ &= -(x^2-12x+36-36) \\ &= -(x-6)^2+36 \end{aligned}$$

이차함수는 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.
따라서 꼭짓점이 $(6, 36)$ 이므로 반지름의 길이 $x=6$ 일 때, 부채꼴의 넓이 $y$ 가 최댓값 36 을 가진다.

**21.** 둘레의 길이가 $24\,\mathrm{cm}$ 인 부채꼴의 넓이가 최대일 때, 이 부채꼴의 호의 길이를 구하여라.

▶ 답 : ____ $\mathrm{cm}$

▷ 정답 : 12 $\mathrm{cm}$

해설

반지름 $x\,\mathrm{cm}$ , 호의 길이를 $(24-2x)\,\mathrm{cm}$ 라 두면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}x(24-2x) \\ &= x(12-x) \\ &= -x^2+12x \\ &= -(x^2-12x+36)+36 \\ &= -(x-6)^2+36 \end{aligned}$$

따라서 꼭짓점이 $(6, 36)$ 이므로 반지름의 길이가 $6\,\mathrm{cm}$ 일 때, 부채꼴의 넓이가 최댓값 $36\,\mathrm{cm}^2$ 를 가진다.

따라서 호의 길이는 $24-2x=12\,\mathrm{cm}$ 이다.

**22.** 둘레의 길이가 $40\,\mathrm{cm}$ 인 부채꼴의 넓이가 최대가 될 때, 반지름의 길이 및 최대 넓이 $S$ 를 구하여라.

▶ 답: $\underline{\phantom{000}\mathrm{cm}^2}$

▷ 정답: $100\,\underline{\mathrm{cm}^2}$

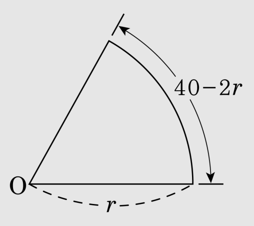
해설

부채꼴의 반지름의 길이를 $r\mathrm{cm}$ 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times r \times (40 - 2r) = r(20 - r)$$
$$= -r^2 + 20r = -(r - 10)^2 + 100$$

한편 $r > 0$ 이고 $40 - 2r > 0$ 이므로 $0 < r < 20$

따라서 $y = 10$ 일 때 최대 넓이는 $100\mathrm{m}^2$ 이다.



**23.** 지면으로부터 60m 되는 높이에서 초속 60m 로 곧바로 위로 쏘아 올린 물체의 $x$ 초 후의 높이를 $y$m 라고 하면 대략 $y = -5x^2 + 60x + 60$ 인 관계가 성립한다. 그 물체의 높이가 최대가 되는 것은 쏘아 올린 지 몇 초 후인가? 또한, 그 때의 높이를 구하여라.

▶ 답 : ______ 초

▶ 답 : ______ m

▷ 정답 : 6 초

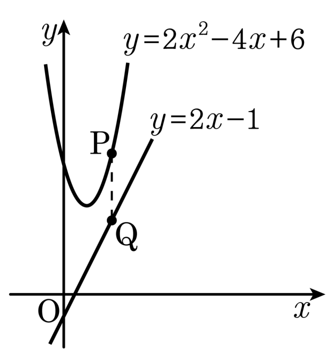
▷ 정답 : 240 m

해설

$y = -5x^2 + 60x + 60 = -5(x-6)^2 + 240$

따라서 $x = 6$ 일 때, 최댓값 240을 갖는다.

**24.** 다음 그림과 같이 $y = 2x^2 - 4x + 6$ 과 $y = 2x - 1$ 이 $y$ 축에 평행인 직선과 만나는 점을 P, Q 라 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 최솟값을 구하여라.




▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{5}{2}$

해설

$\overline{\mathrm{PQ}}$ 가 $y$ 축에 평행하므로 점 P, Q 의 $x$ 좌표는 같다. 이 때, 점 P 의 좌표를 $(t,\ 2t^2 - 4t + 6)$ 이라고 하면, 점 Q 의 좌표는 $(t,\ 2t - 1)$ 이다.

$\overline{\mathrm{PQ}} = 2t^2 - 4t + 6 - (2t - 1) = 2t^2 - 6t + 7 = 2\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$

$\therefore t = \frac{3}{2}$ 일 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 최솟값은 $\frac{5}{2}$

**25.** 이차함수 $y = 2x^2 - 8x + 3a - 4$ 의 최솟값은 $-5$ 보다 크고, 그 그래프가 점 $(2a,\ 8a+5)$ 를 지날 때, 상수 $a$ 의 값은?

① $-3$  ② $-\frac{3}{8}$  ③ $\frac{3}{8}$  ④ $3$  ⑤ $6$

해설

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 8x + 3a - 4 \\ &= 2(x^2 - 4x + 4 - 4) + 3a - 4 \\ &= 2(x-2)^2 - 12 + 3a \end{aligned}$$

$y = 2(x-2)^2 - 12 + 3a$ 의 그래프가 점 $(2a, 8a+5)$ 를 지나므로

$8a + 5 = 2(2a-2)^2 - 12 + 3a$

$8a^2 - 21a - 9 = 0,\ (8a+3)(a-3) = 0$

$\therefore a = -\frac{3}{8}$ 또는 $3$

그런데 최댓값 $-12 + 3a > -5$ 이므로

$i)\ a = -\frac{3}{8}$ 대입 :

$$-12 + 3 \times \left(-\frac{3}{8}\right) = -12 - \frac{9}{8} = -\frac{105}{8} < -5$$

$ii) a = 3$ 대입 : $-12 + 3 \times 3 = -12 + 9 = -3 > -5$

따라서 $a = 3$ 이다.

**26.** $x+y=3,\ x \geq 0,\ y \geq 0$ 일 때, $2x^2+y^2$ 의 최댓값을 $M$ , 최솟값을 $m$ 이라 하면 $M-m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

준식 $y=-x+3$ 에서 $x \geq 0,\ y \geq 0$ 이므로

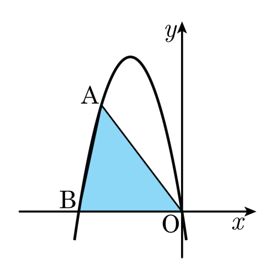
$y=-x+3 \geq 0 \ \rightarrow \ -x \geq -3 \ \rightarrow \ x \leq 3 \therefore \ 0 \leq x \leq 3 \ (\because \ x \geq 0)$

또 $2x^2+y^2=2x^2+(-x+3)^2=2x^2+x^2-6x+9=3x^2-6x+9$

완전 제곱식으로 바꾸면 $3(x^2-2x)+9=3(x-1)^2+6$

$\therefore x=1$ 일 때 최솟값 6 , $x=3$ 일 때 최댓값 18 $\therefore M-m=12$

**27.** 다음 그림은 축의 방정식이 $x=-3$ 인 이차 함수 $y=-x^2+bx+c$ 의 그래프이다. 점 O (원점), B 는 $x$ 축과 만나는 점이고, 점 A 가 O 에서 B 까지 포물선을 따라 움직일 때, $\triangle$OAB 의 넓이의 최댓값은?



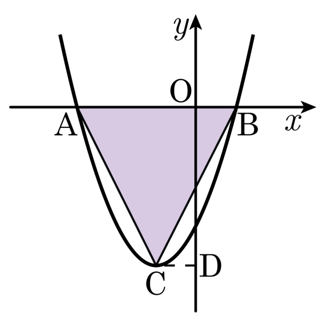

① 18 ② 27 ③ 36

④ 45 ⑤ 54

해설

축이 $x=-3$ 이므로 B 의 좌표는$(-6,\ 0)$ 이다.
따라서 $y=-x^2+bx+c$ 가 두 점
$(0,\ 0)$, $(-6,\ 0)$ 을 지나므로,
$0=c,\ 0=-36-6b$
$b=-6,\ c=0$
$y=-x^2-6x=-(x+3)^2+9$
$\triangle$OAB 에서 밑변의 길이를 $\overline{\text{OB}}$ 라 고 하면, 높이가 최대일 때 $\triangle$OAB 의 넓이가 최대가 된다.
즉, A 가 꼭짓점에 있을 때이다. 꼭짓점의 좌표가 $(-3,\ 9)$ 이므로
$\triangle$OAB 의 넓이$=\frac{1}{2}\times\overline{\text{OB}}\times 9=\frac{1}{2}\times 6\times 9=27$

**28.** 다음 그림과 같이 $y = x^2 + 2x - 3$ 의 그래프가 $x$축과 만나는 점을 A ,꼭짓점을 C 라 할 때, △ABC 의 넓이는?




① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설

$y = x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$

C$(-1, -4)$

$y = 0$ 일 때 $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) = 0$ 이므로

A$(-3, 0)$ , B$(1, 0)$

$\therefore \triangle ABC = \dfrac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$

**29.** 길이가 20m 인 철망을 이용하여 벽을 한 면으로 하는 직사각형 모양의 가축 우리를 만들려고 한다. 가축 우리의 넓이가 최대가 되도록 만들 때, 그 넓이를 구하여라.


▶ 답 : $\underline{\qquad\qquad}$ $\underline{\mathrm{m}^2}$

▷ 정답 : $\underline{50\,\mathrm{m}^2}$

해설

가축 우리의 세로의 길이를 $x$m 라고 하면
가로의 길이는 $(20-2x)$m 이다.
가축 우리의 넓이를 $y\,\mathrm{m}^2$ 라고 하면
$y = x(20-2x) = -2x^2 + 20x$
$= -2(x-5)^2 + 50$
한편, $x > 0$ 이고 $20 - 2x > 0$ 이므로
$0 < x < 10$
따라서 $x = 5$ 일 때
가축 우리의 최대 넓이는 $50\,\mathrm{m}^2$ 이다.

**30.** 지상에서 초속 50m 의 속력으로 쏘아 올린 공의 $t$ 초 후의 높이는 $(50t - 5t^2)$m 이다. 이 공의 높이가 지상으로부터 최대가 되는 것은 쏘아 올린지 몇 초 후인가?

① 5 초 후　② 7 초 후　③ 8 초 후
④ 10 초 후　⑤ 알 수 없다.

해설

$y = 50t - 5t^2$
$y = -5(t^2 - 10t + 25 - 25) = -5(t-5)^2 + 125$
따라서 5 초 후에 최고 높이 125m 가 된다.