1. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$에서

$x^2 = t$로 놓으면

$t^2 - 13t + 36 = 0$, $(t-4)(t-9) = 0$

$\therefore\ t = 4$ 또는 $t = 9$

(i) $t = 4$일 때, $x^2 = 4$

$\therefore\ x = \pm 2$

(ii) $t = 9$일 때, $x^2 = 9$

$\therefore\ x = \pm 3$

따라서 모든 해의 합은

$(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$

2. 사차방정식 $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$의 모든 실근의 곱은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$x^4 + 3x^2 - 10 = 0$에서
$x^2 = t$로 치환하면
$t^2 + 3t - 10 = 0$, $(t+5)(t-2) = 0$
$\therefore\ t = -5$ 또는 $t = 2$
$\therefore\ x = \pm\sqrt{5}i$ 또는 $x = \pm\sqrt{2}$
따라서 모든 실근의 곱은
$\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) = -2$

3. 다음 중 $1+i$가 하나의 근이며 중근을 갖는 사차방정식은?

① $(x^2-2x+2)(x^2-2x+1)$

② $(x^2-2x+2)(x-1)(x+1)$

③ $(x^2-1)(x^2-2x-1)$

④ $(x^2+1)(x-1)(x+1)$

⑤ $(x^2+1)(x^2-2x+1)$

해설

한 근이 $1+i$이면
다른 한 근은 $1-i$이다.
$\therefore\ \{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}=0$
$\Rightarrow\quad x^2-2x+2=0$
주어진 조건에 맞는 방정식 :
$(x^2-2x+2)(x-\alpha)^2=0$
$\therefore$ ①이 조건에 맞다

4. 방정식 $x^3 - x^2 - 11x + 3 = 0$의 유리수 근이 아닌 두 근을 α, β라 할 때, $\sqrt{\alpha^2 + 1} + \sqrt{\beta^2 + 1}$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $2\sqrt{6}$

해설

$x^3 - x^2 - 11x + 3 = 0$

$(x + 3)(x^2 - 4x + 1) = 0$

$\therefore\ x = -3,\ 2 \pm \sqrt{3}$

$\sqrt{\alpha^2 + 1} + \sqrt{\beta^2 + 1}$

$= \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2 + 1} + \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2 + 1}$

$= \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{8 - 4\sqrt{3}}$

$= \sqrt{8 + 2\sqrt{12}} + \sqrt{8 - 2\sqrt{12}}$

$= (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) = 2\sqrt{6}$

5. 사차방정식 $x^4 - 2x^3 + x^2 - 4 = 0$ 의 서로 다른 두 허근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

-1	1	-2	1	0	-4
		-1	3	-4	4
2	1	-3	4	-4	0
		2	-2	4	
	1	-1	2	0	

$(x+1)(x-2)(x^2-x+2)=0$

따라서 두 허근은 $x^2 - x + 2 = 0$ 의 근

허근의 합은 근과 계수와의 관계에 의해 $\alpha + \beta = 1$

6. 방정식 $(x^2+x+2)^2+8=12(x^2+x)$ 의 모든 근의 합은?

① 1 ② 0 ③ -1 ④ -2 ⑤ -3

해설

$x^2+x=Y$ 라 하면, $(Y+2)^2+8=12Y$
$Y^2-8Y+12=0$, $(Y-2)(Y-6)=0$
$Y=2$ 또는 $Y=6$
(i) $Y=2$
$x^2+x-2=0 \Rightarrow x=-2$ 또는 $x=1$
(ii) $Y=6$
$x^2+x-6=0 \Rightarrow x=-3$ 또는 $x=2$
$\therefore$ 모든 근의 합 $=-2$

7. 사차식 x^4-4x^2-12 를 복소수의 범위에서 인수분해하면?

① $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$

② $(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x+2i)(x-2i)$

③ $(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$

④ $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+2i)(x-2i)$

⑤ $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{6}i)(x-\sqrt{6}i)$

해설

x^4-4x^2-12, $x^2=Y$ 라 하자

$\Rightarrow$ $Y^2-4Y-12=(Y+2)(Y-6)=0$

$Y=-2$ 또는 $Y=6$

$\Rightarrow$ $x^2=-2$, $x^2=6$

$\Rightarrow$ $x=\pm\sqrt{2}i$, $x=\pm\sqrt{6}$

$\therefore$ x^4-4x^2-12

$=(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$

8. 다음 사차방정식을 풀 때 근이 <u>아닌</u> 것을 구하면?

$$(x^2-2x)^2-6(x^2-2x)-16=0$$

① 4 ② -4 ③ -2 ④ $1+i$ ⑤ $1-i$

해설

$x^2-2x=X$ 로 놓으면 주어진 방정식은
$X^2-6X-16=0,\ (X-8)(X+2)=0$
$\therefore x=8$ 또는 $X=-2$
(i) $X=8$ 일 때 $x^2-2x=8$ 에서 $(x-4)(x+2)=0$
$\therefore x=4$ 또는 $x=-2$
(ii) $X=-2$ 일 때$x^2-2x=-2$ 에서 $x^2-2x+2=0$
$\therefore x=1\pm i$
따라서 (i), (ii) 에서 $x=4$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1\pm i$

9. 방정식 $(x^2+2)^2-6x^2-7=0$의 두 실근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$(x^2+2)^2-6x^2-7=0$에서
$x^4+4x^2+4-6x^2-7=0$
$x^4-2x^2-3=0$
$x^2=t$로 치환하면
$t^2-2t-3=0$, $(t-3)(t+1)=0$
$\therefore$ $t=3$ 또는 $t=-1$
(i) $x^2=3$일 때, $x=\pm\sqrt{3}$
(ii) $x^2=-1$일 때, $x=\pm i$
(i), (ii)에서 실근의 합을 구하면
$\sqrt{3}+(-\sqrt{3})=0$

10. 삼차방정식 $x^3 - mx^2 + 24x - 2m + 4 = 0$의 한 근이 $4 - 2\sqrt{2}$일 때, 유리수 m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m = 10$

해설

$x = 4 - 2\sqrt{2}$를 주어진 방정식에 대입하면
$(4 - 2\sqrt{2})^3 - m(4 - 2\sqrt{2})^2 + 24(4 - 2\sqrt{2}) - 2m + 4 = 0$
이 식을 정리하면
$(260 - 26m) - (160 - 16m)\sqrt{2} = 0$
무리수가 서로 같은 조건에 의하여
$260 - 26m = 0$, $160 - 16m = 0$
따라서, $m = 10$
계수가 유리수인 방정식이므로 $4 - 2\sqrt{2}$가 근이면 $4 + 2\sqrt{2}$도 근이다.
나머지 한 근을 α라고 하면 근과 계수와의 관계에서
$(4 + 2\sqrt{2}) + (4 - 2\sqrt{2}) + \alpha = m$ ······㉠
$(4 + 2\sqrt{2})(4 - 2\sqrt{2})\alpha = 2m - 4$ ······㉡
㉠에서 $\alpha = m - 8$ ······㉢
㉡에서 $8\alpha = 2m - 4$ ······㉣
㉢을 ㉣에 대입하면 $8(m - 8) = 2m - 4$
$\therefore\ m = 10$

11. x에 관한 삼차방정식 $x^3-3x^2+2x+4=0$의 세 근을 α,β,γ라고 할 때 $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\alpha+\beta+\gamma=3,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2,\ \alpha\beta\gamma=-4$이므로
$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$
$=1-3+2+4=4$

12. 삼차방정식 $x^3 - 2x^2 + ax + 6 = 0$ 의 세 근 α, β, γ 사이에 $\alpha + \beta = \gamma$ 인 관계가 성립할 때, a 의 값은?

① -6 ② -5 ③ -2 ④ -1 ⑤ -3

해설

$x^3 - 2x^2 + ax + 6 = 0$ 에서
$\alpha + \beta + \gamma = 2 \cdots\cdots$ ㉠
$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = a \cdots\cdots$ ㉡
$\alpha\beta\gamma = -6 \cdots\cdots$ ㉢
문제 조건에서 $\alpha + \beta = \gamma$ 이므로
㉠에서 $2\gamma = 2, \quad \therefore \ \gamma = 1$
㉢에 $\gamma = 1$ 을 대입하면, $\alpha\beta = -6$
㉡에서 $\alpha\beta + \gamma(\alpha + \beta) = \alpha\beta + \gamma^2 = a$
$\gamma = 1, \ \alpha\beta = -6$ 을 대입하면 $-6 + 1 = a$
$\therefore \ a = -5$

13. 삼차방정식 $x^3+3x^2-2x-1=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하는 x의 삼차방정식은 $x^3+ax^2+bx+c=0$이다. 이때, $a+b+c$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^3+3x^2-2x-1=0$에서
$\alpha+\beta+\gamma=-3$
$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2$
$\alpha\beta\gamma=1$
$x^3+ax^2+bc+c=0$에서

$$\begin{aligned} -a &= \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} \\ &= \frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} \\ &= \frac{-2}{1} = -2 \end{aligned}$$

$\therefore\ a=2$

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\alpha} \\ &= \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma} = \frac{-3}{1} = -3 \end{aligned}$$

$\therefore\ b=-3$

$-c = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma} = 1$

$\therefore\ c=-1$

$\therefore\ a+b+c=-2$

14. 계수가 유리수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 한근이 $2-\sqrt{3}$일 때, $\dfrac{c-b}{a}$의 값은?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

해설

계수가 유리수인 이차방정식에서 $2-\sqrt{3}$이 근이면 $2+\sqrt{3}$도 근이므로

근과 계수의 관계에 의하여 $-\dfrac{b}{a}=\left(2+\sqrt{3}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)=4$

$\dfrac{c}{a}=\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=1$

$\therefore\ \dfrac{c-b}{a}=\dfrac{c}{a}+\left(-\dfrac{b}{a}\right)=1+4=5$

15. $x^2 - x + 1 = 0$ 일 때, x^{51} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 에서

$(x^2 - x + 1)(x + 1) = 0$

$\therefore x^3 + 1 = 0$

$x^3 = -1$

$x^{51} = (x^3)^{17} = (-1)^{17} = -1$

16. $x^2+x+1=0$일 때, $x^{100}+x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^{100}}$의 값은?

① 1　② -2　③ 0　④ -1　⑤ 2

해설

$x^2+x+1=0$에서

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x^3=1$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= x\cdot x^{99}+x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x\cdot x^{99}} \\ &= x+x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x} \\ &= -1+\frac{x+1}{x^2}\,(\because x^2+x=-1) \\ &= -1+\frac{-x^2}{x^2}\ (\because x+1=-x^2) \\ &= -2\end{aligned}$$

17. 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 근을 α라 할 때, $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5$의 값은?
(단, $i=\sqrt{-1}$)

① 0 ② 1 ③ -1 ④ i ⑤ -2

해설

한 근이 α이므로
$\alpha^2+\alpha+1=0$,
양변에 $\alpha-1$를 곱하면,
$\alpha^3-1=0$, $\therefore\ \alpha^3=1$
$\therefore\ \alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1$
$=\alpha^3(\alpha^2+\alpha+1)+\alpha^2+\alpha+1$
$=0$

18. α, β를 방정식 $x^3=1$의 두 허근이라 할 때, $\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)^{10}+(\beta^2+1)^{10}$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$의
두 허근이 α,β라면,
$x^2+x+1=0$의 두 허근이 α,β이다.
$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=1$
$\alpha^2+\alpha+1=0$, $\alpha+1+\frac{1}{\alpha}=0$,
$\frac{1}{\alpha}+1=-\alpha$
$\beta^2+\beta+1=0$,
$\beta^2+1=-\beta$
$\alpha^3=1, \beta^3=1$
$\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)^{10}+\left(\beta^2+1\right)^{10}$
$=(-\alpha)^{10}+(-\beta)^{10}$
$=\alpha^{10}+\beta^{10}$
$=(\alpha^3)^3\alpha+(\beta^3)^3\beta$
$=\alpha+\beta=-1$

19. $x^3-1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?
(단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

㉠ $\omega^6=1$	㉡ $\omega^2=\overline{\omega}$
㉢ $\omega+\overline{\omega}=-1$	㉣ $\omega^2+\omega=-1$

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉢, ㉣
④ ㉡, ㉢, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$x^3-1=0$의 한 허근이 ω이므로,
$\omega^3=1,\ \ (x-1)(x^2+x+1)=0$
$\omega^2+\omega+1=0$ 켤레근 $\overline{\omega}$일 경우도
$\overline{\omega}^3=1,\ \overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$
㉠ $\omega^3=1,\ \ (\omega^3)^2=1\rightarrow$(○)
㉢ $\omega+\overline{\omega}=-1,$
$\overline{\omega}=-1-\omega=-(\omega+1)$
$\omega^2+\omega+1$을 이용.
$\omega+1=-\omega^2$이므로 $\overline{\omega}=\omega^2\rightarrow$(○)
㉡ 두 근 $\omega,\overline{\omega}$의 합은
$x^2+x+1=0$의 두 근의 합이므로
$\omega+\overline{\omega}=-1$
㉣ $\omega^2+\omega+1=0,$
$\omega^2+\omega=-1\rightarrow$(○)

20. 어떤 정육면체의 밑변의 가로의 길이를 $1\ \mathrm{cm}$줄이고, 세로의 길이와 높이를 각각 $2\ \mathrm{cm}$, $3\ \mathrm{cm}$씩 늘였더니 이 직육면체의 부피가 처음 정육면체의 부피의 $\frac{5}{2}$ 배가 되었다. 처음 정육면체의 한 변의 길이를 구하여라. (단, 정육면체 한 변의 길이는 유리수이다.)

▶ 답 : ________ cm

▷ 정답 : 2 cm

해설

정육면체의 한 변의 길이가 x cm라 하면

조건으로부터 $(x-1)(x+2)(x+3)=\frac{5}{2}x^3$,

$x^3+4x^2+x-6=\frac{5}{2}x^3$,

$\frac{3}{2}x^3-4x^2-x+6=0$ 에서

$3x^3-8x^2-2x+12=0$을 풀면 $x=2(\mathrm{cm})$

21. 다음은 삼차방정식 $x^3+px+1=0$의 한 근을 α라고 할 때, $-\alpha$ 는 $x^3+px-1=0$의 근이고, $\frac{1}{\alpha}$ 은 $x^3+px^2+1=0$의 근임을 보인 과정이다. (가)~(마) 에 들어갈 말로 옳지 않은 것은?

> α는 $x^3+px+1=0$의 근이므로 $\alpha^3+p\alpha+1=0$ $\cdots$ ㉠
> $f(x)=x^3+px-1$이라고 하면 $f(-\alpha)=$ (가)$=$ (나) $=0$ ($\because$ ㉠)
> 따라서 $-\alpha$는 $x^3+px-1=0$의 근이다. 또 $g(x)=x^3+px^2+1$ 이라고 하면 $g\left(\frac{1}{\alpha}\right)=$ (다)$=$ (라)$=$ (마) $=0$($\because$ ㉠)
> 따라서, $\frac{1}{\alpha}$은 $x^3+px^2+1=0$ 의 근이다.

① (가) $(-\alpha)^3+p(-\alpha)-1$
② (나) $-(\alpha^3-p\alpha+1)$
③ (다) $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3+p\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+1$
④ (라) $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3(1+p\alpha+\alpha^3)$
⑤ (마) $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3\cdot 0$

해설

α는 $x^3+px+1=0$의 근이므로 $\alpha^3+p\alpha+1=0$ $\cdots$ ㉠
$f(x)=x^3+px-1$이라고 하면 $f(-\alpha)=(-\alpha)^3+p(-\alpha)-1$
$=-(\alpha^3+p\alpha+1)=0$ ($\because$ ㉠)
따라서 $-\alpha$ 는 $x^3+px-1=0$의 근이다.
또 $g(x)=x^3+px^2+1$ 이라고 하면 $g\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3+p\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+1$
$=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3(1+p\alpha+\alpha^3)=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3\cdot 0=0$ ($\because$ ㉠)
따라서 $\frac{1}{\alpha}$ 은 $x^3+px^2+1=0$ 의 근이다.

22. 사차방정식 $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ 의 서로 다른 실근은 모두 몇 개인가?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad (x + 2)(x - 2)(x + 1)(x - 1) = 0$

$\therefore\ x = 2$ 또는 $x = -2$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = -1$

23. 사차방정식 $x^4-6x^3+11x^2-6x+1=0$ 의 한 근을 α 라 할 때, $\alpha+\frac{1}{\alpha}$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

먼저 주어진 방정식을 x^2 으로 나누면

방정식은 $x^2-6x+11-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-6\left(x+\frac{1}{x}\right)+9=0$ 이 된다.

이 식에 α 를 넣어도 성립하므로

$\alpha+\frac{1}{\alpha}$ 를 t 로 치환하면

$\alpha+\frac{1}{\alpha}$ 는 3 이 된다.

따라서 $\alpha+\frac{1}{\alpha}=3$

24. 삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근 α,β,γ에 대하여 $\alpha+\beta+\gamma=3$ 일 때, 방정식 $f(2x+3)=0$의 세 근의 합은?

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

세 근의 합은 $\left(-\dfrac{x^2\text{의 계수}}{x^3\text{의 계수}}\right)$이므로
x^3의 계수와 x^2의 계수만 구하면 된다.
최고차항의 계수가 1인 삼차방정식을
$f(x)$라 하면 세 근의 합이 3이므로
$f(x)=x^3-3x^2+bx+d$
$f(2x+3)$
$=(2x+3)^3-3\cdot(2x+3)^2+b\cdot(2x+3)+d$
3차항과 2차항의 계수를 중심으로
식을 정리하면
$8x^3+24x^2+\ldots\cdots=0$
$\therefore$세 근의 합$=-3$

해설

$f(2x+3)=0$의 세 근을
각각 $p,\ q,\ r$이라 하면,
$2p+3=\alpha\ \cdots$ ㉠
$2q+3=\beta\ \cdots$ ㉡
$2r+3=\gamma\ \cdots$ ㉢
㉠ + ㉡ + ㉢에서
$2(p+q+r)+9=3$
$\therefore\ p+q+r=-3$

25. $x^3+1=0$의 한 허근을 ω라 할 때,$(\omega^2+1)^5+(\omega-1)^{100}$을 간단히 하면?

① 1　② ω　③ $-\omega$　④ 2ω　⑤ 0

해설

$x^3+1=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+1)=0$
$\omega^3+1=0,\ \omega^3=-1,\ \omega^2-\omega+1=0$
$\omega^2+1=\omega,\ \omega^6=1,\ \omega-1=\omega^2$

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \omega^5+(\omega^2)^{100}=\omega^5+\omega^{200}\\ &= \omega^3\cdot\omega^2+(\omega^6)^{33}\cdot\omega^2\\ &= -\omega^2+\omega^2=0\end{aligned}$$