1. 등식 $\left(\dfrac{2+i}{1+\sqrt{2}i}\right)\left(\dfrac{1-4i}{1-\sqrt{2}i}\right)=a+bi$ 를 만족하는 실수 $a,\ b$ 에 대하여 $a-3b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a-3b=9$

해설

$$(\text{좌변})=\frac{(2+i)(1-4i)}{(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)}$$
$$=\frac{2-8i+i-4i^2}{1-2i^2}$$
$$=\frac{6-7i}{3}=2-\frac{7}{3}i \text{ 이므로}$$

$$2-\frac{7}{3}i=a+bi$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a=2,\ b=-\frac{7}{3}$$

$$\therefore\ a-3b=2-3\times\left(-\frac{7}{3}\right)=2+7=9$$

2. $\frac{5}{1+2i}=x+yi$ 를 만족하는 실수 x, y 의 합을 구하여라.(단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $x+y=-1$

해설

$$\frac{5}{1+2i}=\frac{5(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{5(1-2i)}{5}=1-2i$$

$1-2i=x+yi$

$x=1, y=-2, x+y=-1$

3. $x = 1 + \sqrt{2}i,\ y = 1 - \sqrt{2}i$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ -2 ④ 2 ⑤ -3

해설

$x + y = 2,\ xy = 3$

$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 4 - 6 = -2$

4. 실수 x 에 대하여, $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} = -\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$ 이 성립할 때, $|x+1|+|x-2|$ 의 값을 구하면? (단, $(x+1)(x-2) \neq 0$)

① $2x-1$　② $-2x+1$　③ 3　④ -3　⑤ $x+1$

해설

$\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ 을 만족하려면,

$a < 0,\quad b \geq 0$ 이다.

따라서 $x+1 \geq 0,\ x-2 < 0,\ -1 \leq x < 2,\ x \neq -1,\ x \neq 2$

$\therefore\ -1 < x < 2$

$\therefore |x+1|+|x-2| = x+1-x+2 = 3$

5. 다음 <보기>에서 계산 중 잘못된 것을 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{(-3)\cdot(-3)} = \sqrt{9} = 3$

Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5\times(-2)} = \sqrt{-10} = \sqrt{10}i$

Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \sqrt{\dfrac{2}{-6}} = \sqrt{-\dfrac{1}{3}} = \sqrt{\dfrac{1}{3}}i$

Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{-10}{2}} = \sqrt{-5} = \sqrt{5}i$

① Ⅰ, Ⅱ ② Ⅰ, Ⅲ ③ Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ

④ Ⅱ, Ⅳ ⑤ Ⅲ, Ⅳ

해설

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{3}i\sqrt{3}i = \sqrt{9}i^2 = -3$

∴ 옳지 않다.

Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5}\sqrt{2}i = \sqrt{10}i$

∴ 옳다.

Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}i} = \sqrt{\dfrac{2}{6}}\cdot\dfrac{i}{i^2} = -\sqrt{\dfrac{1}{3}}i$

∴ 옳지 않다.

Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10}i}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{10}{2}}i = \sqrt{5}i$

∴ 옳다.

6. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3} = -\sqrt{-6}$

㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}} = 3i$

㉢ $\sqrt{-27} - \sqrt{-3} = 2\sqrt{3}i$

㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}} = -2i$

㉤ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{5} = -\sqrt{10}$

㉥ $\sqrt{(-3)^2} + (\sqrt{-3})^2 = 6$

① ㉠,㉡　② ㉢,㉣　③ ㉠,㉣,㉤

④ ㉣,㉥　⑤ ㉠,㉡,㉢,㉣,㉥

해설

㉠ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3} = \sqrt{2}i \times \sqrt{3}i = -\sqrt{6}$

㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}i} = -3i$

㉢ $\sqrt{-27} - \sqrt{-3} = 3\sqrt{3}i - \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}i$

㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}} = \dfrac{4}{2i} = -2i$

㉤ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{2}i \times \sqrt{5} = \sqrt{10}i$

㉥ $\sqrt{(-3)^2} + (\sqrt{-3})^2 = \sqrt{9} + (\sqrt{3}i)^2 = 0$

7. $\sqrt{-x^2(x^2-1)^2}$ 이 실수가 되는 서로 다른 실수 x들의 총합은?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{-x^2(x^2-1)^2} &= \sqrt{x^2(x^2-1)^2}i \\ &= \sqrt{x^2}\sqrt{(x^2-1)^2}i \\ &= |x|\cdot|x^2-1|i \\ &= |x|\cdot|x+1||x-1|i\end{aligned}$$

그러므로 $x=0,\ 1,\ -1$일 때 총합은 0이 된다.

8. 복소수 $(1-xi)(1-i)$가 순허수가 되도록 실수 x의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=1$

해설

$(1-xi)(1-i)=(1-x)+(-1-x)i$

순허수이려면 실수부가 $0 \Rightarrow 1-x=0$,

$x=1$

9. 실수 k 에 대하여 복소수 $z = 3(k+i) - k(1-i)^2$ 의 값이 순허수가 될 때, $z \cdot \bar{z}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$z = 3(k+i) - k(1-i)^2$ 를 정리하면

$z = 3k + 3i + 2ki = 3k + (3+2k)i$

이것이 순허수이려면 $3k = 0,\ 3 + 2k \neq 0$

$k = 0$ 이므로 $z = 3i,\ \bar{z} = -3i$

$\therefore z \cdot \bar{z} = 3i \cdot -3i = 9$

10. $a=(1+i)^n$ 을 양의 실수가 되게 하는 최소의 자연수 n 의 값과 그 때의 a 의 값의 합을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

$(1+i)^n = \{(1+i)^2\}^{\frac{n}{2}} = (2i)^{\frac{n}{2}} = 2^{\frac{n}{2}} \cdot i^{\frac{n}{2}}$

$i^{\frac{n}{2}}$ 이 양의 실수가 되는 최소의 n 의 값은 $i^4=1$ 이므로 $\frac{n}{2}=4$

$\therefore\ n=8$

$\therefore\ a=(2i)^4=16$

$\therefore\ n=8,\ a=16$

$\therefore\ n+a=24$

11. 복소수 z 에 대하여 다음 보기 중 항상 실수인 것을 모두 고르면?(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이고 $z \neq 0$ 이다

㉠ $z+\bar{z}$	㉡ $z\bar{z}$	㉢ $(z-\bar{z})^2$
㉣ $\frac{1}{z}-\frac{1}{\bar{z}}$	㉤ $\frac{\bar{z}}{z}$	

① ㉠

② ㉠ ,㉡

③ ㉠ ,㉡ ,㉢

④ ㉠ ,㉡ ,㉢ ,㉣

⑤ ㉠ ,㉡ ,㉢ ,㉣ ,㉤

해설

$z=a+bi$ 라 하자 $\Rightarrow$ $\bar{z}=a-bi$

㉠ $z+\bar{z}=2a$

㉡ $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

㉢ $(z-\bar{z})^2=(2bi)^2=-4b^2$

㉣ $\frac{1}{z}-\frac{1}{\bar{z}}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}-\frac{a+bi}{a^2+b^2}=\frac{-2bi}{a^2+b^2}$

㉤ $\frac{\bar{z}}{z}=\frac{(a-bi)^2}{a^2+b^2}$

12. 방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 근을 w 라 할 때, $z=\dfrac{3w+1}{w+1}$ 이라 하면, $z\overline{z}$ 의 값은?
(단, $\overline{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

① 7 ② 6 ③ 5 ④ 4 ⑤ 3

해설

$x^2+x+1=0$ 의 한 근을 w 라 하면, 다른 근은 $\overline{w}$ 이다.

$w+\overline{w}=-1,\ w\overline{w}=1$

$$z\overline{z}=\frac{3w+1}{w+1}\cdot\frac{3\overline{w}+1}{\overline{w}+1}$$
$$=\frac{9w\overline{w}+3(w+\overline{w})+1}{w\overline{w}+(w+\overline{w})+1}$$
$$=7$$

13. $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{14}$ 의 값은?

① -1　　② $-\dfrac{1}{2}$　　③ 0　　④ $\dfrac{1}{2}$　　⑤ 1

해설

$\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에서 $2\alpha + 1 = \sqrt{3}i$

양변을 제곱해서 정리하면 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

$(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0, \alpha^3 = 1$

$\therefore\ \alpha^{3k+1} = \alpha, \alpha^{3k+2} = \alpha^2, \alpha^{3k} = 1$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (\alpha + \alpha^2 + 1) + (\alpha + \alpha^2 + 1) + \\ &\quad \cdots + (\alpha + \alpha^2 + 1) + \alpha + \alpha^2 \\ &= \alpha + \alpha^2 \\ &= -1\end{aligned}$$

$(\because\ \alpha^2 + \alpha + 1 = 0)$

14. $A(n) = i^n + (-1)^n n$, $f(n) = A(1) + A(2) + \cdots + A(n)$이라 할 때, $f(10)+f(11)+f(12)+f(13)$의 값은? (단, n은 자연수이고 $i = \sqrt{-1}$이다.)

① $2i - 2$ ② $2i + 2$ ③ $2i - 4$

④ $2i + 4$ ⑤ $4i - 2$

해설

$$f(10) = (i-1) + (i^2+2) + (i^3-3) + \cdots + (i^{10}+10)$$
$$= (i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{10})$$
$$+ (-1+2-3+\cdots+10)$$
$$= (i-1) + (1+1+1+1+1)$$
$$= i + 4$$
$$f(11) = f(10) + i^{11} - 11$$
$$= (i+4) + (-i-11) = -7$$
$$f(12) = f(11) + i^{12} + 12$$
$$= -7 + (1+12) = 6$$
$$f(13) = f(12) + i^{13} - 13$$
$$= 6 + (i-13) = i - 7$$
$$\therefore f(10)+f(11)+f(12)+f(13)$$
$$= (i+4) + (-7) + 6 + (i-7) = 2i - 4$$

15. 복소수 α의 실수부가 양이고, $\alpha^3 = i$일 때, $\alpha + \dfrac{1}{\alpha}$의 값을 구하면? (단, $i^2 = -1$)

① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$　④ 2　⑤ $\sqrt{5}$

해설

$\alpha = a + bi$ (a, b 는 실수)라 하면

$\alpha^3 = (a+bi)^3 = a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i = i$

$a(a^2 - 3b^2) = 0 \cdots$ ㉠

$b(3a^2 - b^2) = 1 \cdots$ ㉠

$a > 0$ 이므로 $a^2 = 3b^2$ 을 ㉡에 대입하면

$b(9b^2 - b^2) = 1,\ 8b^3 = 1$

$\therefore\ b = \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ a = \sqrt{3}b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

$\therefore\ \alpha + \dfrac{1}{\alpha} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) + \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i} = \sqrt{3}$