1. 이차방정식 $x^2 - 2x + a + 1 = 0$의 두 근이 서로 다른 부호의 실근을 가질 때, a의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a < -1$

해설

(두 근의 곱)$= a + 1 < 0 \quad \therefore a < -1$

2. x에 대한 일차방정식 $(a^2+3)x+1=a(4x+1)$ 의 해가 무수히 많을 때, a의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$(a^2+3-4a)x=a-1$

모든 x에 대해 성립하려면

$a^2-4a+3=0,\ a-1=0$

공통근 : $a=1$

3. x에 대한 이차방정식 $(k^2-1)x^2-2(k-1)x+1=0$이 허근을 가질 때, $k>m$이다. m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(k^2-1)x^2-2(k-1)x+1=0$이

허근을 가지려면

$$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-1)<0$$

$(k^2-2k+1)-(k^2-1)<0$

$-2k+2<0,\ k>1$

$\therefore\ m=1$

4. 이차식 $x^2-2(k-1)x+2k^2-6k+4$가 x에 대하여 완전제곱식이 될 때, 상수 k의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차식이 완전제곱식이 되면

이차방정식 $x^2-2(k-1)x+2k^2-6k+4=0$

이 중근을 갖는다.

따라서, $\frac{D}{4}=(k-1)^2-(2k^2-6k+4)=0$

위의 식을 정리하면

$-k^2+4k-3=0$

$k^2-4k+3=0$

$(k-1)(k-3)=0$에서

$k=1$ 또는 $k=3$

5. 이차함수의 최댓값 또는 최솟값과 그 때의 x 의 값이 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $y = 2x^2 \rightarrow x = 0$ 일 때, 최솟값 0

② $y = -3x^2 + 4 \rightarrow x = 0$ 일 때, 최댓값 4

③ $y = -(x+3)^2 \rightarrow x = -3$ 일 때, 최댓값 0

④ $y = -(x+2)^2 - 1 \rightarrow x = -2$ 일 때, 최댓값 -1

⑤ $y = 2x^2 + 4x + 1 \rightarrow x = -1$ 일 때, 최솟값 1

해설

⑤ $y = 2(x^2 + 2x + 1 - 1) + 1$

$y = 2(x+1)^2 - 1$

따라서 $x = -1$ 일 때 최솟값 -1 을 갖는다.

6. 방정식 $x^2+|x|=|x-1|+5$를 만족하는 두 근의 곱은?

① $-2\sqrt{6}$　② $-\sqrt{6}$　③ 0

④ $\sqrt{6}$　⑤ $2\sqrt{6}$

해설

i) $x<0$일 때

$x^2-x=-(x-1)+5,\ x^2=6$

$\therefore x=\pm\sqrt{6}$

그런데 $x<0$이므로 $x=-\sqrt{6}$

ii) $0\le x<1$일 때

$x^2+x=-(x-1)+5$

$x^2+2x-6=0$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{7}$

그런데 $0\le x<1$이므로 해가 없다.

iii) $x\ge 1$일 때,

$x^2+x=x-1+5,\ x^2=4$

$\therefore x=\pm 2$

그런데 $x\ge 1$이므로 $x=2$

i), ii), iii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=2$ 또는 $x=-\sqrt{6}$이므로

두 근의 곱은 $-2\sqrt{6}$

7. 이차방정식 $x^2-3x+4=0$의 두 근을 a, b라 할 때, a^2+b^2 와 ab를 두 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식은?

① $x^2-8x+12=0$ ② $x^2-7x+12=0$

③ $x^2+7x+12=0$ ④ $x^2+5x+4=0$

⑤ $x^2-5x+4=0$

해설

$x^2-3x+4=0$의 두 근이 a, b라면

$a+b=3,\ ab=4$

$$\begin{cases} a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=9-8=1 \\ ab=4 \end{cases}$$

1, 4를 두 근으로 하는 이차방정식은

$x^2-5x+4=0$

8. 함수 $f(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x + 3) + 3x^2 - 6x$ 의 최솟값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2 - 2x + 2 = t$ 로 놓으면

$t = (x-1)^2 + 1 \geq 1$ 이고

$$\begin{aligned} f(x) = g(t) &= t(t+1) + 3t - 6 \\ &= t^2 + 4t - 6 \\ &= (t+2)^2 - 10 \ (t \geq 1) \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은

$g(1) = (1+2)^2 - 10 = -1$

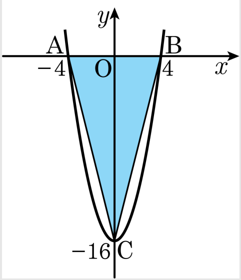
9. 이차함수 $y = x^2 - 16$ 의 그래프에서 x 축과의 교점을 A, B 라 하고 꼭짓점을 C 라 할 때, $\triangle ABC$ 의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 64

해설

x 축과의 교점A, B 는 $x^2 - 16 = 0$ 의 근과 같다.
따라서 $x = \pm 4$ 이다.



꼭짓점의 좌표는 $(0,\ -16)$ 이다.

구하는 넓이는 $\frac{1}{2} \times 8 \times 16 = 64$ 이다.

10. 어떤 축구 선수가 축구공을 찼을 때, t 초 후의 높이를 hm 라고 하면 $h = -\frac{1}{2}t^2 + 3t$ 의 관계가 성립한다. 축구공이 가장 높이 올라갔을 때의 높이를 구하여라.

▶ **답 :** ______ m

▷ **정답 :** $\underline{\frac{9}{2}\,\mathrm{m}}$

해설

$h = -\frac{1}{2}t^2 + 3t$ 에서 $h = -\frac{1}{2}(t-3)^2 + \frac{9}{2}$ 이다.

따라서 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 $\frac{9}{2}$m 이다.

11. 이차방정식 $x^2-2ix-k=0$의 근에 대한<보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $k>1$이면 두 근은 실근이다.

㉡ $k=1$이면 두 근은 같다.

㉢ 두 근의 곱은 실수이다.

㉣ $0<k<1$이면 두 근은 순허수이다.

① ㉠, ㉡ ② ㉡, ㉣ ③ ㉠, ㉡, ㉢

④ ㉡, ㉢, ㉣ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

근의 공식을 이용하여 $x^2-2ix-k=0$ 의 근을 구하면 $x=i\pm\sqrt{-1+k}$

㉠ $k>1$이어도 x는 허수이다.<거짓>

㉡ $k=1$이면 $x=i$로 두 근은 같다.<참>

㉢ 두 근의 곱 $-k$는 허수일 수도 있다.<거짓>

㉣ $0<k<1$이면 $-1<-1+k<0$ 이므로 $\sqrt{-1+k}=ai$ 의 형태가 되어 x는 순허수이다.<참>

12. x에 대한 이차방정식 $3x^2-(2k+5)x+3=0$의 두 근 중 한 근을 α라 할 때, $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=k^2$이 성립한다. 이때, 양수 k의 값을 구하면?

① 2　　② $\dfrac{5}{3}$　　③ 1　　④ $\dfrac{4}{3}$　　⑤ 3

해설

두 근의 곱이 1이므로 한 근이 a이면

다른 한 근은 $\dfrac{1}{a}$이다.

$\therefore\quad a+\dfrac{1}{a}=k^2=\dfrac{2k+5}{3}$

$\therefore\quad 3k^2-2k-5=0$

$k=\dfrac{5}{3}$ 또는 -1

$\therefore$ 양수 $k=\dfrac{5}{3}$

13. x에 대한 이차방정식 $x^2+2x-3=m(x+2)$가 $1<x<2$에서 적어도 한 개의 실근을 가질 때, 정수 m의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$$\begin{cases} y=x^2=2x-3 \cdots\cdots ㉠ \\ y=m(x+2) \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

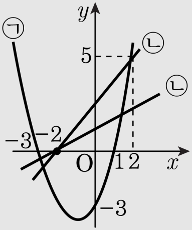
이라 하면 직선 ㉡은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-2,\ 0)$을 지난다.

이 때, 교점의 x좌표가 1과 2사이에 존재해야 하므로

(ⅰ) 직선 ㉡이

점 $(1,\ 0)$을 지날 때

$3m=0 \quad \therefore m=0$



(ⅱ) 직선 ㉡이 점 $(2,\ 5)$를 지날 때

$$4m=5 \quad \therefore m=\frac{5}{4}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $0<m<\dfrac{5}{4}$

따라서, 정수 m의 값은 1하나뿐이다.

14. 이차함수 $y = x^2 - 2(m+1)x + 4m$ 의 최솟값을 a 이라 할 때, a 의 최댓값은?

① 1 ② -1 ③ 2 ④ -2 ⑤ 0

해설

$$
\begin{aligned}
y &= x^2 - 2(m+1)x + 4m \\
&= \left\{x^2 - 2(m+1)x + (m+1)^2 - (m+1)^2\right\} + 4m \\
&= \left\{x - (m+1)\right\}^2 - (m+1)^2 + 4m
\end{aligned}
$$

$\therefore$ 최솟값 $M = -(m+1)^2 + 4m$

$$
\begin{aligned}
&= -m^2 + 2m - 1 \\
&= -(m^2 - 2m + 1) \\
&= -(m-1)^2
\end{aligned}
$$

따라서 a 의 최댓값은 0 이다.

15. 원 $(x-3)^2+(y-3)^2=6$ 위의 점 $(x,\ y)$ 에 대하여 $\dfrac{y}{x}$ 의 최댓값은?

① $3+2\sqrt{2}$　② $2+\sqrt{3}$　③ $3\sqrt{3}$

④ 6　⑤ $6+\sqrt{2}$

해설

$\dfrac{y}{x}=t$ 라고 놓으면 $y=tx \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 $(x-3)^2+(y-3)^2=6$ 에 대입하여 정리하면

$(t^2+1)x^2-6(t+1)x+12=0$

$\dfrac{D}{4}\geq 0$ 이므로 $9(t+1)^2-12(t^2+1)\geq 0$

$t^2-6t+1\leq 0$

$\therefore\ 3-2\sqrt{2}\leq t\leq 3+2\sqrt{2}$

따라서 구하는 최댓값은 $3+2\sqrt{2}$ 이다.