1. 다음은 유리식과 무리식의 정의이다.

> 유리식 : 두 다항식 A, B$(B \neq 0)$에 대하여, $\dfrac{A}{B}$ 와같이 분수의 꼴로 나타내어지는식, 특히 B가 상수인 유리식 $\dfrac{A}{B}$ 는 다항식이므로 다항식도 유리식이다. 한편, 유리식 중에서 다항식이 아닌 유리식을 분수식이라고 한다.
> 무리식 : 근호 안에 문자가 포함되어 있는 식으로 유리식으로 나타낼 수 없는 식

주어진 식에 대한 설명으로 바르게 짝지어진 것을 고르면?

① $\dfrac{x^2+5}{3x+2}$-다항식

② $\sqrt{2}x+3$-유리식

③ $\dfrac{x^2-1}{3}$-분수식

④ $\sqrt{x^2-1}$-유리식

⑤ $2x+\sqrt{x^2+5}$-다항식

해설

① 분수식 ③유리식 ④무리식 ④무리식

2. $a > 0,\ b < 0$일 때, $\sqrt{a^2b^2} = \boxed{}$이다. $\boxed{}$에 알맞은 식을 써넣어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-ab$

해설

$a^2 > 0,\ b^2 > 0$이므로

$\sqrt{a^2b^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2} = |a||b|$

$a > 0$일 때, $|a| = a$이고

$b < 0$일 때, $|b| = -b$

따라서 $\sqrt{a^2b^2} = a \cdot (-b) = -ab$

3. $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ 을 계산하면 $a+b\sqrt{c}$가 된다. 이때, $a+b+c$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=5-2\sqrt{6}$$

$a=5,\ b=-2,\ c=6$

$\therefore a+b+c=9$

4. $x = 2 + \sqrt{3},\ y = 2 - \sqrt{3}$ 일 때, $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ 의 값은?

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

해설

$x = 2 + \sqrt{3},\ y = 2 - \sqrt{3}$ 일 때,

$xy = 4 - 3 = 1,\ x + y = 4$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{14}{1} = 14$$

$(\therefore x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy)$

5. $x = 4 - \sqrt{3}$일 때, $x^2 - 8x + 15$의 값을 구하시오.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 2

해설

$x = 4 - \sqrt{3}$에서 $x - 4 = -\sqrt{3}$의 양변을 제곱하면, $(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16 = 3$이므로

$x^2 - 8x = -13$

$\therefore\ x^2 - 8x + 15 = -13 + 15 = 2$

6. 등식 $a(1+3\sqrt{2})+b(2-\sqrt{2})=-4+9\sqrt{2}$를 만족하는 유리수 a, b의 값은?

① $a=1,\quad b=-3$

② $a=1,\quad b=-2$

③ $a=2,\quad b=-3$

④ $a=-2,\quad b=-1$

⑤ $a=-2,\quad b=3$

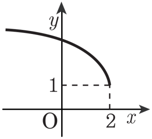
해설

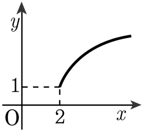
$(a+2b)+(3a-b)\sqrt{2}=-4+9\sqrt{2}$이므로

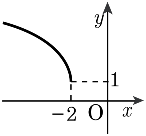
$$\begin{cases} a+2b=-4 \\ 3a-b=9 \end{cases}$$ 를 연립하면,

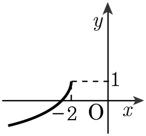
$\therefore a=2,\quad b=-3$

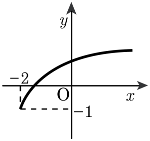
7. 함수 $y = 2\sqrt{-3x+6}+1$ 의 그래프는?

①


②


③


④


⑤


해설

$y = 2\sqrt{-3(x-2)}+1$

$\Rightarrow$ 꼭짓점 : $(2, 1)$

정의역 : $x \leq 2$, 치역 : $y \geq 1$

8. 다음 중 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 $y = \sqrt{-x}$의 그래프와 겹쳐질 수 없는 것은?

① $y = -\sqrt{1-x}+1$　　② $y = \sqrt{x}-1$

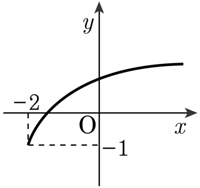
③ $y = \sqrt{x-1}+3$　　④ $y = -\sqrt{-x+2}+2$

⑤ $y = \sqrt{-2x+1}-1$

해설

⑤ $y = \sqrt{ax+b}+c$에서 a의 계수가 다르면
평행이동 또는 대칭이동에 의해 겹쳐지지 않는다.

9. 다음 그래프는 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를 평행 이동한 것이다. 이 그래프의 함수는?



① $y = \sqrt{x-2}+1$

② $y = \sqrt{x-2}-1$

③ $y = \sqrt{x+2}+1$

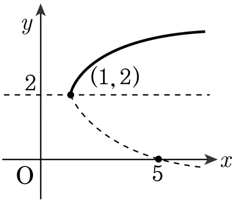
④ $y = \sqrt{x+2}-1$

⑤ $y = -\sqrt{x-2}-1$

해설

x축으로 -2만큼
y축으로 -1만큼 평행이동했으므로
x 대신 $x+2$, y 대신 $y+1$을 대입하면
$y = \sqrt{x+2}-1$

10. 다음 그래프로 나타낼 수 있는 함수는?



① $y = 2 - \sqrt{x-1}$

② $y = 2 + \sqrt{x-1}$

③ $y = 2 + \sqrt{x+1}$

④ $y = 2 - \sqrt{x+1}$

⑤ $y = 2 - \sqrt{-x+1}$

해설

$y = \sqrt{ax}$ $(a > 0)$ 의 그래프를
x축으로 1, y 축으로 2만큼 평행이동한
그래프이므로 $y = \sqrt{a(x-1)} + 2(a > 0)$ 꼴이다.
주어진 식 중에서 적당한 것은 ② 뿐이다.

해설

꼭짓점이$(1,\ 2)$ 이고 변역은 $x \geq 1,\ y \geq 2$ 이므로
$x = a(y-2)^2 + 1$
점 $(5,\ 0)$ 을 지나므로
$5 = a(0-2)^2 + 1 \ \rightarrow \ a = 1$
$x = (y-2)^2 + 1 \ \rightarrow \ y = 2 + \sqrt{x-1}$

11. 두 함수 $f(x) = -\sqrt{2x+1}+4$, $g(x) = \sqrt{5-x}+3$ 에 대하여 $(g \circ f)(4)$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(4) = -\sqrt{2 \cdot 4 + 1} + 4 = 1$

$(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(1)$ 이므로

$(g \circ f)(4) = \sqrt{5-1} + 3 = 5$

12. $a<0,\ b<0$일 때, 다음 중 옳은 것을 고르면?

① $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$ ② $\dfrac{\sqrt{b}}{a}=\sqrt{\dfrac{b}{a^2}}$

③ $\sqrt{a^2b^2}=ab$ ④ $\sqrt{-ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$

⑤ $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$

해설

① $\sqrt{a^2b}=-a\sqrt{b}$

② $\sqrt{\dfrac{b}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^2}}=\dfrac{\sqrt{b}}{-a}$

③ $\sqrt{a^2b^2}=\sqrt{a^2}\sqrt{b^2}=(-a)(-b)=ab$

④ $\sqrt{-ab}=\sqrt{-a}\sqrt{b}=\sqrt{(-1)a}\ \sqrt{b}$

$=-\sqrt{-1}\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{a}\sqrt{b}i$

⑤ $\sqrt{ab}=-\sqrt{a}\sqrt{b}$

13. $1 < a < 4$ 일 때, $\sqrt{(a-4)^2} + |a-1|$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 3

해설

$$\sqrt{(a-4)^2} + |a-1|$$
$$= |a-4| + |a-1|$$
$$= -a+4+a-1 \quad = 3$$

14. $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, $y = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ 일 때, 다음 식의 값은?

$$\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{y}\right)^3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

① $3(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ ② $3(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ ③ 9

④ $5(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ ⑤ $7(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

해설

$$(\text{주어진 식}) = \frac{\frac{x^3 + y^3}{(xy)^3}}{\frac{x + y}{xy}}$$

$$= \frac{(x+y)^3 - 3xy(x+y)}{(x+y)(xy)^2}$$

$$= \frac{(x+y)^2 - 3xy}{(xy)^2}$$

조건에서 $x + y = 2\sqrt{3},\ xy = 1$

$$\therefore\ (\text{주어진 식}) = \frac{(2\sqrt{3})^2 - 3 \cdot 1^2}{1} = 9$$

15. $x = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$, $y = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ 일 때, x^3+y^3 의 값은?

① $8\sqrt{3}$ ② $24\sqrt{3}$ ③ $30\sqrt{3}$ ④ 48 ⑤ 52

해설

$$x = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3},$$

$$y = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$$

$x+y=4,\quad xy=1$

$$\begin{aligned} x^3+y^3 &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) \\ &= 4^3 - 3\times 4 = 52 \end{aligned}$$

16. 함수 $y = \sqrt{-4x+12}-2$ 는 함수 $y = a\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 b 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행이동한 것이다. $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$y = \sqrt{-4(x-3)}-2 = 2\sqrt{-(x-3)}-2$ 이고

$y = 2\sqrt{-x} \xrightarrow[y\text{축 } -2]{x\text{축 } 3} y = 2\sqrt{-(x-3)}-2$ 이므로

$a = 2, b = 3, c = -2$

$\therefore\ a+b+c = 2+3-2 = 3$

17. 무리함수 $y = \sqrt{2x+1}+2$ 의 그래프를 평행이동$f:(x,\ y) \to (x+a,\ y+b)$ 에 의해 옮긴 그래프의 식이 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 일 때, 상수 $a,\ b,\ c$ 의 합 $a+b+c$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$y = \sqrt{2x+1}+2$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로
b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{2(x-a)+1}+2+b \\ &= \sqrt{2x-2a+1}+2+b \end{aligned}$$

이 식이 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 와 같으므로
$a = 2,\ \ -2a+1 = b,\ 2+b = c$
따라서, $a = 2,\ b = -3,\ c = -1$ 이므로
$\therefore\ a+b+c = -2$

18. 좌표평면에서 무리함수 $y = -\sqrt{-x+2}+1$의 그래프가 지나지 않는 사분면을 모두 구하면?

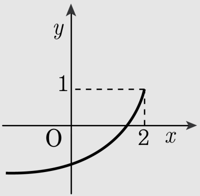
① 제 1사분면 ② 제 2사분면

③ 제 3사분면 ④ 제 1사분면, 제 2사분면

⑤ 제 3사분면, 제 4사분면

해설

무리함수의 그래프를 그려보면 아래와 같다.



따라서, 무리함수의 그래프가 지나지 않는 것은
제 2사분면이다.

19. 무리함수 $y = \sqrt{9+3x} - 2$ 에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 고르면?

① 그래프는 x 축과 점 $\left(\frac{5}{3},\ 0\right)$ 에서 만난다.

② 정의역은 $\{x|x \le -3\}$ 이다.

③ 치역은 $\{y|y \ge -1\}$ 이다.

④ 그래프를 평행이동하면 $y = -\sqrt{3x}$ 의 그래프와 겹칠 수 있다.

⑤ 제4 사분면을 지나지 않는다.

해설

① $y = \sqrt{9+3x} - 2$ 에 $x = \frac{5}{3}$ 를 대입하면

$y = \sqrt{14} - 2$

따라서, 점 $\left(\frac{5}{3},\ \sqrt{14} - 2\right)$ 를 지난다.

② $9 + 3x \ge 0$ 에서 $x \ge -3$

따라서, 정의역은 $\{x|x \ge -3\}$ 이다.

③ $\sqrt{9+3x} \ge 0$ 이므로 치역은

$\{y|y \ge -2\}$ 이다.

④ $y = \sqrt{9+3x} - 2 = \sqrt{3(x+3)} - 2$ 이므로

$y = \sqrt{3x}$ 의 그래프를

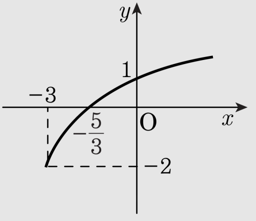
x 축의 방향으로 -3 만큼,

y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y = \sqrt{9+3x} - 2$ 의 그래프는

그림과 같으므로

제4 사분면을 지나지 않는다.



20. $1 \le x \le 5$ 에서 함수 $y = -\sqrt{3x+1}+4$ 의 최댓값을 a , 최솟값을 b 라 할 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$y = -\sqrt{3x+1}+4 = -\sqrt{3\left(x+\frac{1}{3}\right)}+4$$

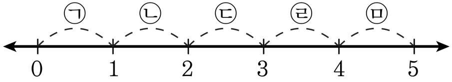
주어진 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{1}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소한다.

$x = 1$ 일 때, 최댓값 $a = -\sqrt{3+1}+4 = 2$

$x = 5$ 일 때, 최솟값 $b = -\sqrt{15+1}+4 = 0$

$\therefore\ a-b = 2-0 = 2$

21. $f(a,\ b) = \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$ 로 정의할 때 $f(2,\ 1)+f(3,\ 2)+f(4,\ 3)+f(5,\ 4)+\cdots+f(10,\ 9)$ 의 값이 k 라 하면, 다음 중 실수 k 에 대응하는 수는 직선 위에서 어느 위치에 있는가? (단, $a>b>0$)



▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

$a>b$ 일 때, $f(a,\ b) = \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}$

$\therefore\ f(2,\ 1)+f(3,\ 2)+f(4,\ 3)+\cdots+f(10,\ 9)$

$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots$

$+(\sqrt{10}-\sqrt{9})$

$=-1+\sqrt{10}=k$

그런데 $\sqrt{9}<\sqrt{10}<\sqrt{16}$ 에서

$2<-1+\sqrt{10}<3$ 이므로

k 는 ㉢안에 있다.

22. $x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 일 때, $x^2 - x - 2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 에서 $2x = \sqrt{5}+1$

$2x - 1 = \sqrt{5}$ 의 양변을 제곱하면

$4x^2 - 4x + 1 = 5 \quad \therefore\ x^2 - x - 1 = 0$

$\therefore\ x^2 - x - 2 = x^2 - x - 1 - 1 = 0 - 1 = -1$

23. 함수 $y = \sqrt{2x+2}+a$ 의 그래프가 제 1 , 3 , 4 사분면을 지나도록 하는 정수 a의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

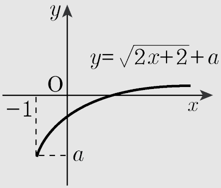
▷ 정답 : -2

해설

$y = \sqrt{2x+2}+a = \sqrt{2(x+1)}+a$

주어진 함수는 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 이 함수의 그래프가 제 1 , 3 , 4 사분면을 지나려면 $x = 0$ 일 때, $y < 0$ 이어야 한다.



$\sqrt{2}+a < 0$ 이므로 $a < -\sqrt{2}$

따라서 정수 a의 최댓값은 -2 이다.

24. 다음 함수 중 그 그래프가 제 1, 3, 4 사분면을 지나는 것은?

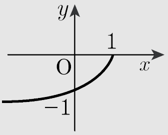
① $y=-\sqrt{1-x}$　　② $y=\sqrt{2x+4}-3$

③ $y=-\sqrt{2x+3}+3$　　④ $y=\sqrt{1-4x}+5$

⑤ $y=-\sqrt{6-2x}-1$

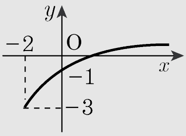
해설

① 제 3, 4 사분면을 지난다.



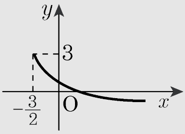
$y=-\sqrt{1-x}$

② 제 1, 3, 4 사분면을 지난다.



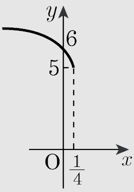
$y=\sqrt{2x+4}-3$

③ 제 1, 2, 4 사분면을 지난다.



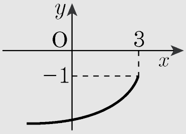
$y=-\sqrt{2x+3}+3$

④ 제 1, 2 사분면을 지난다.



$y=\sqrt{1-4x}+5$

⑤ 제 3, 4 사분면을 지난다.



$y=-\sqrt{6-2x}-1$

따라서 그래프가 제 1, 3, 4 사분면을 지나는 것은 ②이다.

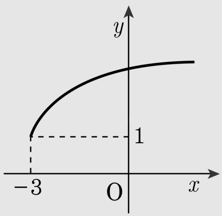
25. 함수 $y=\sqrt{2x+6}+1$ 의 그래프의 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것을 나열하면?

㉠ $y=\sqrt{2x}$를 평행이동한 것이다. ㉡ $y=\sqrt{2x}$를 대칭이동한 것이다. ㉢ 정의역 : $\{x \mid x \geq 3$인 실수$\}$ ㉣ 치역 : $\{y \mid y \geq 1$인 실수$\}$

① ㉡, ㉣　② ㉠, ㉡　③ ㉠, ㉢　④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉣

해설

$y=\sqrt{2(x+3)}+1$ 의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



㉠ $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x 축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한

것이다.

$\therefore$ 참

㉡ $y=\sqrt{2x}$ 의 그래프를 평행이동한 것이다.

$\therefore$ 거짓

㉢ 정의역은 $\{x \mid x \geq -3$인 실수$\}$이다.

$\therefore$ 거짓

㉣ 치역은 $\{y \mid y \geq 1$인 실수$\}$이다.

$\therefore$ 참

26. $1 \leq x \leq a$일 때, $y = \sqrt{2x-1}+3$의 최솟값이 m, 최댓값이 6이다. $a+m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

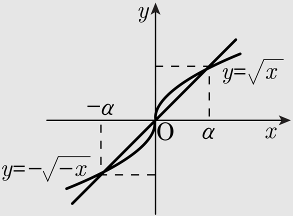
$1 \leq x \leq a$에서, 함수 $y = \sqrt{2x-1}+3$은 증가함수이므로
$x = 1$ 일때 최솟값을 가진다.
곧, $m = \sqrt{2-1}+3 = 4$
$\therefore m = 4$
또한, $x = a$일 때 최댓값을 가지므로
$6 = \sqrt{2a-1}+3$
$\therefore a = 5$
$\therefore a+m = 9$

27. 원점을 지나는 직선이 두 함수 $y = \sqrt{x}$, $y = -\sqrt{-x}$의 그래프와 서로 다른 세 점에서 만날 때, 세 점의 x좌표의 값의 합을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

두 함수 $y = \sqrt{x}$, $y = -\sqrt{-x}$의 그래프는
원점에 대하여 대칭이므로
다음 그림과 같이 원점을 지나는 직선과 서로 다른 세 점에서 만날 때, 세 점의 x좌표의 값의 합은 항상 0이다.



28. 직선 $y=\frac{1}{2}(x+1)$ 위의 한 점 P에서 x축에 평행한 직선을 그어 무리함수 $y=\sqrt{x-1}$의 그래프와 만나는 점을 Q라 할 때, $\overline{PQ}$의 최솟값을 구하면?

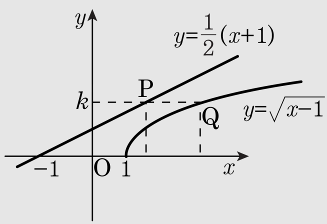
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

무리함수 $y=\sqrt{x-1}$의 그래프와

직선 $y=\frac{1}{2}(x+1)$을 좌표평면 위에

나타내면 다음 그림과 같다.



그림에서와 같이 점 P 의 y 좌표를 k 라 하면

① 점 P의 x좌표는 $k=\frac{1}{2}(x+1)$에서

$x=2k-1$

② 점 Q의 x좌표는 $k=\sqrt{x-1}$ 에서

$x=k^2+1$

$\therefore\ \overline{PQ}=|k^2+1-(2k-1)|$

$=|k^2-2k+2|$

$=|(k-1)^2+1|\geq 1$

따라서, $\overline{PQ}$ 의 최솟값은 1이다.

29. 무리함수 $y = \sqrt{kx}$의 그래프가 두 점 $(2,\ 2)$, $(3,\ 6)$을 잇는 선분과 만나도록 하는 정수 k의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 11 개

해설

함수 $y = \sqrt{kx}$의 그래프가 점 $(2,\ 2)$를 지날 때

$2 = \sqrt{2k}, \quad 2k = 4$

$\therefore k = 2$

또, 함수 $y = \sqrt{kx}$의 그래프가 점 $(3,\ 6)$을 지날 때

$6 = \sqrt{3k}, \quad 3k = 36$

$\therefore k = 12$

따라서 구하는 실수 k의 값의 범위는

$2 \le k \le 12$ 이므로

정수 k는 $2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 12$ 의 11개다.

30. $x \geq 1$이고 $a = \dfrac{2x}{x^2+1}$일 때, $f(x) = \sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}$에 대하여 $f(x)$의 최댓값을 구하면?

① $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

해설

$\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}$

$= \sqrt{1 + \dfrac{2x}{x^2+1}} - \sqrt{1 - \dfrac{2x}{x^2+1}}$

$= \sqrt{\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}} - \sqrt{\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}}$

$= \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ $(\because\ x \geq 1)$

$= \dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}}$

$\therefore\ f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}}$에서 $x = 1$일 때

최댓값 $f(1) = \sqrt{2}$

31. $x=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$, $y=\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$ 일 때, $\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{x+y}{4}}-\sqrt{1-\dfrac{x+y}{4}}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$$x=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$$

$$y=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1,\ x+y=2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{1+\frac{x+y}{4}}=\sqrt{1+\frac{2\sqrt{3}}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4+2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$$

$$\sqrt{1-\frac{x+y}{4}}=\sqrt{1-\frac{2\sqrt{3}}{4}}$$

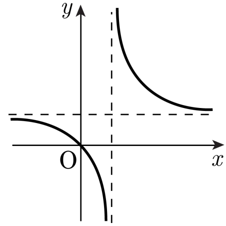
$$=\frac{1}{2}\sqrt{4-2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$$

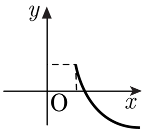
주어진 식에 대입하면

$$\frac{1}{\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)-\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)}=\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=1$$

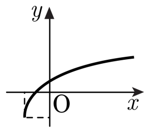
32. 다음 그림은 분수함수 $y = \dfrac{b}{x+a} + c$ 의 그래프의 개형이다. 다음 중 무리함수 $y = a - \sqrt{bx+c}$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?



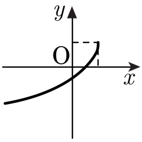
①



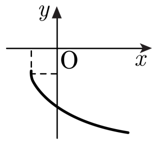
②



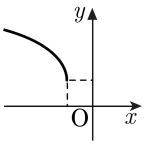
③



④



⑤



해설

점근선이 $x =$ 양수, $y =$ 양수 이므로

$y = \dfrac{b}{x+a} + c$에서 $a < 0,\ c > 0$

그리고 원점을 지나므로

$\dfrac{b}{a} + c = 0,\ b = -ac > 0$

$\therefore\ y = -\sqrt{bx+c} + a$

꼭짓점 $\left(-\dfrac{c}{b},\ a\right),\ \left(-\dfrac{c}{b} < 0, a < 0\right)$

루트 앞의 부호가 음수이므로 그래프의 개형은 ④이다.

33. 양수 a의 소수 부분을 b라 할 때, $a^2+b^2=8$을 만족하는 a의 값을 구하면?

① $1+\sqrt{3}$　② $2+\sqrt{3}$　③ $2-\sqrt{3}$

④ $1-\sqrt{3}$　⑤ $3+2\sqrt{3}$

해설

(i) a가 정수일 때,

$b=0,\ a^2=8\ a=2\sqrt{2}$ (모순)

(ii) $a>0$, 정수가 아닐 때 $b\neq 0$

a의 정수부분을 k라 하면

$a=k+b\ (0<b<1)$이라 하면

$a^2+b^2=8$에서 $b^2=8-a^2$

$0<8-a^2<1,\ \sqrt{7}<a<\sqrt{8}$

$\therefore k=2$　$\therefore\ b=a-2$

$a^2+(a-2)^2=2a^2-4a+4=8$

$a^2-2a-2=0,\ a=1\pm\sqrt{3}$

$\therefore\ a=1+\sqrt{3}(\because a>0)$

34. $a<0,\ b<0$이고 $x=\dfrac{a-b}{2\sqrt{ab}}$일 때, $\dfrac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}+x}$를 a, b로 나타내면?

① $\dfrac{b}{a}$ ② $\dfrac{a}{b}$ ③ $\dfrac{b}{2a}$ ④ $-\dfrac{2a}{b}$ ⑤ $\dfrac{a}{2b}$

해설

$$\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+\frac{(a-b)^2}{4ab}}=\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4ab}}$$

$$=\frac{-(a+b)}{2\sqrt{ab}}(\because\ a<0,\ b<0)$$

$$\therefore\ \sqrt{1+x^2}-x=\frac{-(a+b)}{2\sqrt{ab}}-\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}=\frac{-a}{\sqrt{ab}}$$

$$\sqrt{1+x^2}+x=\frac{-(a+b)}{2\sqrt{ab}}+\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}=\frac{-b}{\sqrt{ab}}$$

$$\therefore\ \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}+x}=\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}$$

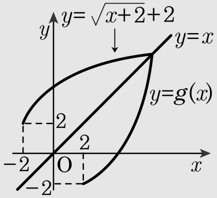
35. 무리함수 $y = \sqrt{x+2}+2$의 역함수를 $y = g(x)$라 할 때, 연립방정식 $\begin{cases} y = \sqrt{x+2}+2 \\ y = g(x) \end{cases}$ 의 근을 $x = \alpha,\ y = \beta$라 하자. 이 때, $\alpha^2 - 5\beta$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

두 함수 $y = \sqrt{x+2}+2,\ y = g(x)$의 그래프는
직선 $y = x$에 대하여 대칭이므로 그림과 같이
그 교점은 직선 $y = x$위에 있다.



즉, 연립방정식 $\begin{cases} y = \sqrt{x+2}+2 \\ y = g(x) \end{cases}$ 의 근은
$y = x$를 만족한다. $(\alpha = \beta)$
따라서, $y = \sqrt{x+2}+2$ 와 $y = x$를 연립하면 된다.

$x = \sqrt{x+2}+2$ 에서 $x-2 = \sqrt{x+2}$
$x^2 - 4x + 4 = x + 2$
$x^2 - 5x + 2 = 0$
$\therefore\ \alpha^2 - 5\alpha + 2 = 0$
$\therefore\ \alpha^2 - 5\beta = \alpha^2 - 5\alpha\ (\because \alpha = \beta)$
$= -2$