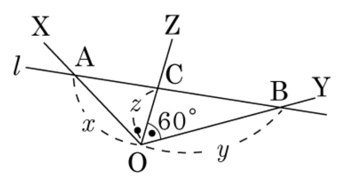
1. 세 점 A, B, C 는 세 직선 $\overleftrightarrow{\mathrm{OX}}$, $\overleftrightarrow{\mathrm{OY}}$, $\overleftrightarrow{\mathrm{OZ}}$ 가 직선 l 과 만나는 점이다. $\angle\mathrm{AOC} = \angle\mathrm{BOC} = 60^\circ$ 이고, $\overline{\mathrm{OA}} = x$, $\overline{\mathrm{OB}} = y$, $\overline{\mathrm{OC}} = z$ 라고 할 때, x, y, z 사이의 관계식을 골라라.



① $z = xy$　　② $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$　　③ $z = x + y$

④ $z = \dfrac{1}{xy}$　　⑤ $\dfrac{1}{z} = \dfrac{xy}{x+y}$

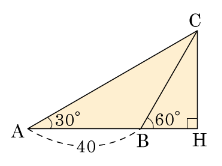
해설

$$\triangle\mathrm{AOB} = \frac{1}{2}xy\sin(180^\circ - 120^\circ)$$
$$= \frac{1}{2}xz\sin 60^\circ + \frac{1}{2}yz\sin 60^\circ$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}xy \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}xz \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}yz \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

따라서 $xy = (x+y)z$ 에서 xyz 를 양변에 나누어주면 $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ 이다.

2. 다음은 $\triangle ABC$ 에서 $\angle A = 30°$, $\angle CBH = 60°$, $\overline{AB} = 40$ 일 때, $\overline{CH}$ 의 길이를 구하는 과정이다. $\boxed{}$ 안의 값이 옳지 <u>않은</u> 것은?



$\overline{CH} = h$라고 하면

$\overline{AH} = \dfrac{h}{\boxed{(가)}}$, $\overline{BH} = \dfrac{h}{\boxed{(나)}}$

$\overline{AB} = \boxed{(다)} = \dfrac{h}{\tan 30°} - \dfrac{h}{\tan 60°}$, $h \times \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \boxed{(라)}$

$\therefore\ h = 40 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{(마)}$

① (가) $\tan 60°$ ② (나) $\tan 60°$ ③ (다) $\overline{AH} - \overline{BH}$

④ (라) 40 ⑤ (마) $20\sqrt{3}$

해설

(가) 에 $\tan 30°$ 가 들어가야 한다.

$\overline{CH} = h$라고 하면

$\overline{AH} = \dfrac{h}{\tan 30°}$, $\overline{BH} = \dfrac{h}{\tan 60°}$

$\overline{AB} = \overline{AH} - \overline{BH} = \dfrac{h}{\tan 30°} - \dfrac{h}{\tan 60°} = 40$

$h\left(\dfrac{1}{\tan 30°} - \dfrac{1}{\tan 60°}\right) = 40,\ h \times \dfrac{2}{\sqrt{3}} = 40$

$\therefore\ h = 40 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$

3. x 에 관한 이차방정식 $ax^2-2x+8=0$ 의 한 근이 $2\sin 90° - 3\cos 0°$ 일 때, a 의 값을 구하면?

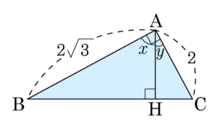
① -10 ② -6 ③ -2 ④ 2 ⑤ 6

해설

이차방정식 $ax^2-2x+8=0$ 에 $x=-1$ 을 대입하면, $a\times(-1)^2-2\times(-1)+8=0$

$a+2+8=0,\ a=-10$

4. 다음 그림의 직각삼각형 ABC 에서 $\cos x + \cos y$ 의 값은?



① $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ ② 1 ③ $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$
④ $\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

해설

$\triangle\mathrm{AHC} \backsim \triangle\mathrm{BAC}$ (AA 닮음)

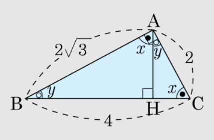
$\angle\mathrm{B} = \angle y,\ \angle\mathrm{C} = \angle x$

$\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$

$\angle x = \angle\mathrm{C}, \quad \cos x = \dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{BC}}} = \dfrac{2}{4}$

$\angle y = \angle\mathrm{B}, \quad \cos y = \dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{BC}}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4}$

$\therefore \cos x + \cos y = \dfrac{2}{4} + \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$



5. 이차함수 $y = ax^2 + bx + 3$ 의 그래프의 축과 직선 $x = -2$는 y 축에 대해 서로 대칭일 때, $\dfrac{a^2}{b^2}$ 의 값을 구하여라. (단, $ab \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{1}{16}$

해설

$y = a\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x\right) + 3 = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a} + 3$ 이므로 대칭축은 $x = -\dfrac{b}{2a}$ 이다.

이 축이 $x = -2$ 와 y 축에 대해 대칭이므로 대칭축은 $x = 2$ 이다.

$-\dfrac{b}{2a} = 2$, $\dfrac{b}{a} = -4$, $\dfrac{a}{b} = -\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ \dfrac{a^2}{b^2} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = \dfrac{1}{16}$

6. 이차함수 $y=(x-p)^2+1$ 의 꼭짓점의 좌표가 직선 $y=\frac{1}{2}x-2$ 의 위에 있을 때, p 의 값을 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$y=(x-p)^2+1$ 의 꼭짓점의 좌표가 $(p,\ 1)$ 이고, 직선 $y=\frac{1}{2}x-2$ 위에 있으므로

$1=\frac{1}{2}p-2 \qquad \therefore\ p=6$

7. 점 $(2,\ 10)$을 지나고 꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ -8)$인 이차함수의 그래프가 있다. 이 포물선과 직선 $y=-3$에 대하여 대칭인 포물선의 그래프의 x 절편의 x 좌표값을 각각 $\alpha,\ \beta$라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하여라.

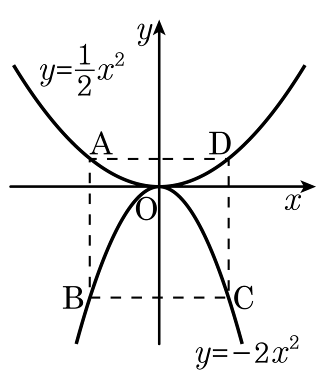
▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ -8)$인 이차함수의 방정식은
$y=a(x+1)^2-8$이고 점 $(2,\ 10)$을 지나므로
$10=a(2+1)^2-8$
$\therefore\ a=2$
따라서 이차함수의 그래프는 $y=2(x+1)^2-8$
이 포물선과 직선 $y=-3$에 대하여 대칭인 포물선의 그래프는
꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ 2)$ 이므로
$y=-2(x+1)^2+2$
이 그래프의 x 절편은 $y=0$일 때의 x의 값이므로
$-2x^2-4x=0$
$\therefore\ x=0,\ -2$
$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=4$

8. 다음 그림과 같이 두 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=-2x^2$ 의 그래프 위에 네 점 A, B, C, D 가 있다. 이 때, □ABCD 는 정사각형일 때, 점 A 의 y 좌표는?



① $\frac{2}{25}$ ② $\frac{4}{25}$ ③ $\frac{6}{25}$ ④ $\frac{8}{25}$ ⑤ $\frac{11}{25}$

해설

점 A 의 좌표를 $\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$ 이라고 하면 $\mathrm{B}\left(a,\ -2a^2\right)$,

$\mathrm{D}\left(-a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$ 이고 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AB}}$ 이므로

$2a=\left\{\frac{1}{2}a^2-(-2a^2)\right\}$, $a=\frac{4}{5}$ $(\because a\neq 0)$ 이다.

따라서 점 A 의 y 좌표는 $\frac{1}{2}a^2=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{8}{25}$ 이다.

9. 다음 중 보기의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $y = x^2$	㉡ $y = \frac{2}{3}x^2$	㉢ $y = -\frac{1}{4}x^2$
㉣ $y = -\frac{2}{3}x^2$	㉤ $y = 2x^2$	㉥ $y = \frac{5}{2}x^2$

① 아래로 볼록한 포물선은 ㉢,㉣이다.

② 대칭축의 식은 $y = 0$, 꼭짓점의 좌표는 $(0, 0)$ 이다.

③ 포물선의 폭이 가장 넓은 것은 ㉢이다.

④ ㉤ 그래프의 y의 값의 범위는 $y \geq 2$이다.

⑤ ㉡과 ㉣의 그래프는 x 축에 대하여 대칭이다.

해설

① 아래로 볼록한 것은 ㉠,㉡,㉤,㉥이다.
② 대칭축은 $x = 0$, 꼭짓점은 $(0, 0)$ 이다.
④ ㉤그래프의 y의 값의 범위는 $y \geq 0$이다.

10. 이차함수 $y = ax^2$ 의 그래프가 $y = -\frac{3}{2}x^2$ 의 그래프보다 폭이 좁고, $y = 2x^2$ 의 그래프보다 폭이 넓다고 할 때, 음수 a 의 값의 범위는?

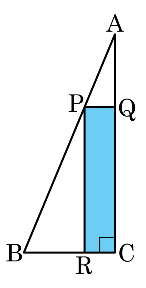
① $-\frac{3}{2} < a < 2$ ② $-\frac{3}{2} < a < -2$ ③ $\frac{3}{2} < a < 2$
④ $-2 < a < -\frac{3}{2}$ ⑤ $-2 < a < \frac{3}{2}$

해설

$\frac{3}{2} <| a |< 2$

$\frac{3}{2} < a < 2$ 또는 $-2 < a < -\frac{3}{2}$ 이고, a 가 음수이므로 $-2 < a < -\frac{3}{2}$ 이다.

11. 다음 그림과 같이 $\angle C = 90°$, $\overline{AC} = 36$, $\overline{BC} = 15$ 인 직각삼각형 ABC 의 빗변 위의 한 점 P 에서 나머지 변에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 이라고 하자. 사각형 PQCR 의 넓이가 120 일 때, 선분 BR 의 길이를 구하여라. (단, $\overline{BR} > \overline{RC}$)



▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$\triangle APQ$ 와 $\triangle ABC$ 가 닮음이므로

$\overline{PQ} = x$ 라 하면 $\overline{AQ} = \frac{12}{5}x$

$\overline{QC} = 36 - \frac{12}{5}x$

따라서 $x\left(36 - \frac{12}{5}x\right) = 120$

$x^2 - 15x + 50 = 0$

$(x-10)(x-5) = 0$

$x > 0$ 이므로 $x = 10$ 또는 $x = 5$

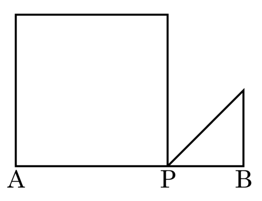
$\overline{RC} = 5$ 또는 10

$\overline{RC} = 5$ 일 때, $\overline{BR} = 15 - 5 = 10$

$\overline{RC} = 10$ 일 때, $\overline{BR} = 15 - 10 = 5$

$\therefore$ $\overline{BR} > \overline{RC}$ 이므로 $\overline{BR} = 10$

12. 길이가 6 cm 인 선분 AB 위에 점 P 를 잡아서 다음 그림과 같이 정사각형과 직각이등변삼각형을 만들어 넓이의 합이 $18\,\text{cm}^2$ 가 되게 하려고 한다. 선분 AP 의 길이를 구하여라. (단, 선분 AP 의 길이는 자연수이다.)



▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 4 cm

해설

선분 AP 의 길이를 x cm 라고 하면

(정사각형의 넓이) $= x^2$

(직각이등변삼각형의 넓이) $= \frac{1}{2}(6-x)^2$

$x^2 + \frac{1}{2}(6-x)^2 = 18$

$\frac{3}{2}x^2 - 6x + 18 - 18 = 0$

$3x^2 - 12x = 0$

$3x(x-4) = 0$

선분 AP 의 길이는 자연수이므로 $x = 4(\text{cm})$

13. 들어 있는 구슬의 개수의 차이가 6 개인 상자가 2 개 있다. 상자에 들어 있는 구슬의 곱이 72 일 때, 구슬이 더 많이 들어 있는 상자 안의 구슬의 수를 구하여라.

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 12 개

해설

두 상자에 들어있는 구슬의 수를 x, $x-6$ 라 하면

$x(x-6) = 72$

$(x-12)(x+6) = 0$

$x > 0$ 이므로 $x = 12$ (개)

14. 이차방정식 $3x^2-6x-2=0$ 을 $(x-a)^2=b$ 의 꼴로 나타낼 때, $2a+3b$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$3x^2-6x-2=0$

$3x^2-6x=2$

$x^2-2x=\frac{2}{3}$

$x^2-2x+1=\frac{5}{3}$

$(x-1)^2=\frac{5}{3}$

$a=1,\ b=\frac{5}{3}$

$\therefore 2a+3b=2\times1+3\times\frac{5}{3}=2+5=7$

15. 이차방정식 $x^2 - 5x - a = 0$ 의 중근을 b 라고 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{15}{4}$

해설

$D = 25 + 4a = 0,\ a = -\frac{25}{4}$

$x^2 - 5x + \frac{25}{4} = 0,\ \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 0$

$x = \frac{5}{2} = b$

$\therefore a + b = -\frac{25}{4} + \frac{5}{2} = -\frac{15}{4}$

16. 이차방정식 $x^2-8x+15=0$ 의 두 근을 a, b 라고 할 때, 다음 중 $a+2, b+2$ 를 두 근으로 갖는 이차항의 계수가 1 인 이차방정식은?

① $x^2-2x-35=0$
② $x^2+2x-35=0$
③ $x^2-12x+35=0$
④ $x^2+12x+35=0$
⑤ $x^2-4x-30=0$

해설

$x^2-8x+15=0$
$(x-5)(x-3)=0$
$a=5,\ b=3$
$\therefore a+2=7,\ b+2=5$
따라서 5, 7을 두 근으로 하는 이차방정식은
$(x-7)(x-5)=0$
$\therefore\ x^2-12x+35=0$

17. 이차방정식 $(x+2)(x-3)=0$을 풀면?

① $x=-2$ 또는 $x=-3$
② $x=-2$ 또는 $x=3$
③ $x=2$ 또는 $x=3$
④ $x=2$ 또는 $x=-3$
⑤ $x=0$ 또는 $x=3$

해설
$x+2=0$ 또는 $x-3=0$
$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=3$

18. $x^2 - ax - 3x + 3a - 3$ 이 두 일차식의 곱으로 인수분해 될 때, a 가 될 수 있는 값의 합은? (단, 주어진 다항식은 정수 범위에서 인수분해 된다.)

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$x^2 - ax - 3x + 3a - 3 = (x+\alpha)(x+\beta)$ 로 놓으면

$x^2 - (a+3)x + 3a - 3 = x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$

$a + 3 = -(\alpha+\beta)$ 에서 $a = -\alpha - \beta - 3$

$3a - 3 = \alpha\beta$ 에서 $a = \dfrac{\alpha\beta + 3}{3}$

$\therefore\ -\alpha - \beta - 3 = \dfrac{\alpha\beta + 3}{3}$

$\alpha\beta + 3\alpha + 3\beta + 12 = 0$

$(\alpha+3)(\beta+3) = -3$

$\alpha + 3 = \pm 1$ 일 때, $\beta + 3 = \mp 3$ 이므로

$(\alpha, \beta) = (-2, -6)\ (-4, 0)$

$\therefore\ a = -\alpha - \beta - 3$ 에서 $a = 1,\ 5$

19. 이차식 $9x^2+10x-k$ 가 완전제곱식이 될 때, 상수 k 의 값은?

① $\frac{25}{9}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ $\frac{10}{3}$ ④ $-\frac{25}{9}$ ⑤ $-\frac{5}{3}$

해설

$(3x)^2+2\times 3x\times\frac{5}{3}-k$ 이므로 $-k=\left(\frac{5}{3}\right)^2$

$\therefore k=-\frac{25}{9}$

20. $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ 일 때, $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(39)+f(40)$ 의 값을 구하면?

① $\sqrt{40}-1$ ② $\sqrt{40}+1$ ③ $\sqrt{41}-1$
④ $\sqrt{41}+1$ ⑤ $\sqrt{41}-\sqrt{40}$

해설

$f(1) = \sqrt{2}-1 = -1+\sqrt{2}$
$f(2) = \sqrt{3}-\sqrt{2} = -\sqrt{2}+\sqrt{3}$
$f(3) = \sqrt{4}-\sqrt{3} = -\sqrt{3}+\sqrt{4}\cdots$
$f(39) = \sqrt{40}-\sqrt{39} = -\sqrt{39}+\sqrt{40}$
$f(40) = \sqrt{41}-\sqrt{40} = -\sqrt{40}+\sqrt{41}$
$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(39)+f(40)$
$= (-1+\sqrt{2})+(-\sqrt{2}+\sqrt{3})+(-\sqrt{3}+\sqrt{4})+\cdots+(-\sqrt{39}+\sqrt{40})+(-\sqrt{40}+\sqrt{41}) = -1+\sqrt{41}$

21. 다음 중에서 옳은 설명을 모두 고른 것은?

모든 무리수 x, y 에 대하여 ㄱ. $x+y$ 는 항상 무리수이다. ㄴ. $x-y$ 는 항상 무리수이다. ㄷ. $x\times y$ 는 항상 무리수이다. ㄹ. $x\div y$ 는 항상 무리수이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ　⑤ 없다

해설

ㄱ.의 반례 : $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$ 라 하면 $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$
ㄴ.의 반례 : $x=\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$ 라 하면 $\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$
ㄷ.의 반례 : $x=\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$ 라 하면 $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=(\sqrt{2})^2=2$
ㄹ.의 반례 : $x=\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$ 라 하면 $\sqrt{2}\div\sqrt{2}=1$
따라서, 옳은 것은 ⑤ 없다.

22. $-1 < x < y < 0$ 일 때, 다음 중 1 보다 큰 수를 고르면?

① $\sqrt{xy}$　② $\sqrt{-\frac{y^2}{x}}$　③ $\sqrt{-\frac{y}{x^2}}$
④ $\sqrt{-x^2y}$　⑤ $\sqrt{-xy^2}$

해설

$-1 < x < y < 0$ 이므로 $xy < 1$ 이고 $\frac{y}{x} < 1$, $\frac{x}{y} > 1$

① $\sqrt{xy} < 1$

② $\sqrt{-\frac{y^2}{x}} < \sqrt{-y} < 1$

③ $\frac{x}{y} > 1, -\frac{1}{y} > 1$ 이므로 $\sqrt{-\frac{x}{y^2}} > 1$

④ $\sqrt{-x} < 1$ 이므로 양변에 $\sqrt{xy}$ 를 곱하면 $\sqrt{-x^2y} < \sqrt{xy} < 1$

⑤ $\sqrt{-y} < 1$ 이므로 양변에 $\sqrt{xy}$ 를 곱하면 $\sqrt{-x^2y} < \sqrt{xy} < 1$
따라서 1 보다 큰 것은 ③뿐이다.

23. $3\sqrt{2\sqrt{18\sqrt{324}}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$$
\begin{aligned}
3\sqrt{2\sqrt{18\sqrt{324}}} &= 3\sqrt{2\sqrt{18\sqrt{(2\times 3^2)^2}}} \\
&= 3\sqrt{2\sqrt{18\times(2\times 3^2)}} \\
&= 3\sqrt{2\sqrt{(2\times 3^2)^2}} \\
&= 3\sqrt{6^2} \\
&= 18
\end{aligned}
$$

24. $x^2-x+3=4$ 이고 $x=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots}}}$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=1$

해설

$x=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots}}}$ 에서

$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots}}}=\sqrt{a+x}=x$ 이므로

$a+x=x^2$, $x^2-x=a$

$x^2-x+3=4$ 이므로

$a+3=4$

$\therefore a=1$

25. 반지름의 길이의 비가 $1:3$ 인 두 원이 있다. 이 두 원의 넓이의 합이 $40\pi\text{cm}^2$ 일 때, 작은 원의 반지름의 길이는 몇 cm 인가?

① 1cm ② 2cm ③ 3cm ④ 4cm ⑤ 5cm

해설

작은 원의 반지름을 r 라고 하면, 큰 원의 반지름은 $3r$ 이다.
(두 원의 넓이의 합)$= \pi r^2 + \pi(3r)^2 = 10\pi r^2 = 40\pi\,\text{cm}^2$
$r^2 = 4$
$\therefore\ r = 2\,\text{cm}\ (\because r > 0)$