1. 두 다항식 $A,\ B$ 에 대하여 $A+B=-x^3-2x^2+4x+5$, $2A-B=4x^3-x^2-x+1$ 일 때, 두 다항식 A, B 를 구하면?

① $A=x^3+x^2+x+2,\ B=-2x^3-3x^2+3x+3$

② $A=x^3-x^2+x+2,\ B=-2x^3-x^2+3x+3$

③ $A=x^3-x^2+x-2,\ B=-2x^3-x^2+3x+7$

④ $A=x^3-x^2-x+2,\ B=-2x^3-x^2+5x+3$

⑤ $A=3x^3-3x^2+3x+6,\ B=-4x^3+x^2+x-1$

해설

$A+B=-x^3-2x^2+4x+5\cdots$ ㉠
$2A-B=4x^3-x^2-x+1\cdots$ ㉡
(㉠ + ㉡) $\div 3$: $A=x^3-x^2+x+2$
(2㉠ − ㉡) $\div 3$: $B=-2x^3-x^2+3x+3$

2. x에 대한 다항식 x^3+2x^2-ax+b가 x^2+x-2로 나누어 떨어질 때, a^2+b^2의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$f(x)=x^3+2x^2-ax+b=(x^2+x-2)Q(x)$
$\quad\quad=(x+2)(x-1)Q(x)$
인수정리에 의해 $x=-2, x=1$을 대입하면 우변이 0 이 된다.
$\therefore f(-2)=-8+8+2a+b=0$
$f(1)=1+2-a+b=0$ 연립하면, $a=1, b=-2$
$\therefore\ a^2+b^2=5$

3. $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$이고, $a = \sqrt{3} + 1$일 때, $a^{x^2} \div a^{2\sqrt{2}x+3}$의 값을 구하면?

① $\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$　② $\dfrac{4+\sqrt{3}}{4}$　③ $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{4}$
④ $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$　⑤ $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

해설

(i) $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$에서 $x - \sqrt{2} = \sqrt{3}$
$x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 3$
$\therefore\ x^2 - 2\sqrt{2}x = 1$
(ii) $a^{x^2} \div a^{2\sqrt{2}x+3} = a^{x^2-2\sqrt{2}x-3} = a^{-2}$
$= \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$

4. $x^2 + x - 1 = 0$ 일 때, $x^5 - 5x$ 의 값을 구하면?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -3

해설

$x^5 - 5x$ 를 $x^2 + x - 1$ 로 나누면
즉, $x^5 - 5x = (x^2 + x - 1) \times$ 몫-3
$x^2 + x - 1 = 0$
$\therefore\ x^5 - 5x = -3$

해설

다음과 같이 식의 차수를 낮춰 나갈 수 있다.
$x^2 = -x + 1$

$$\begin{aligned} x^5 - 5x &= (x^2)^2 \times x - 5x \\ &= x(-x+1)^2 - 5x \\ &= x^3 - 2x^2 - 4x \\ &= x(-x+1) - 2(-x+1) - 4x \\ &= -x^2 - x - 2 \\ &= -(x^2 + x) - 2 \\ &= -1 - 2 = -3 \end{aligned}$$

5. $a+b=4$, $a^2+b^2=10$일 때, a^5+b^5의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 244

해설

$a+b=4$, $a^2+b^2=10$

$ab=\frac{1}{2}\{(a+b)^2-(a^2+b^2)\}=3$

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=28$

$$\begin{aligned}\therefore\ a^5+b^5 &= (a^3+b^3)(a^2+b^2)-a^2b^2(a+b)\\ &= 28\times 10-9\times 4\\ &= 244\end{aligned}$$

6. 모든 실수 x에 대하여 등식 $x^{100}-1 = a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+ \cdots + a_{100}(x-1)^{100}$이 성립할 때, $a_0+a_2+a_4+ \cdots +a_{100} = 2^m+k$이다. $m+k$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 98

해설

$x=0$을 대입하면

$a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{100}=-1\cdots$ ㉠

$x=2$를 대입하면

$a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}=2^{100}-1\cdots$ ㉡

㉠ + ㉡: $2(a_0+a_2+a_6+\cdots+a_{100)}=2^{100}-2$

$\therefore\ a_0+a_2+a_6+\cdots+a_{100}=2^{99}-1$

$\therefore\ m=99,\ k=-1$이므로 $m+k=98$

7. 세 실수 a, b, c가 $a+b+c=3,\ a^2+b^2+c^2=9,\ a^3+b^3+c^3=24$를 만족시킬 때, $a^4+b^4+c^4+1$의 값을 구하면?

① 69 ② 70 ③ 71 ④ 72 ⑤ 73

해설

$a+b+c=3 \cdots$①
$a^2+b^2+c^2=9 \cdots$②
$a^3+b^3+c^3=24 \cdots$③ 이라 하면,
②식에서
$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=9$
$9-2(ab+bc+ca)=9$
$\therefore\ ab+bc+ca=0 \quad \cdots$④
③식에서
$a^3+b^3+c^3$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$
$24=3\cdot(9-0)+3abc$
$\therefore\ abc=-1 \quad \cdots$⑤
$a^4+b^4+c^4+1$
$=(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+1$
$=81-2\cdot 6+1=70$
$(\because\ a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$
$=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$
$=0-2\times(-1)\times 3$
$=6)$

8. 모든 x에 대하여 $f(x+1)-f(x-1)=6x^2+6,\ f(0)=1$을 만족시키는 다항식 $f(x)$가 있다. 다음은 자연수 n에 대하여 $(x+\alpha)^n = x^n + n\alpha x^{n-1} + \cdots + \alpha^n$을 이용하여, $f(x)$를 구하는 과정이다.

> $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$(단, $a_n \neq 0$)라고 놓으면
> $f(x+1)-f(x-1)$
> $= a_n\{(x+1)^n-(x-1)^n\} + a_{n-1}\{(x+1)^{n-1}-(x-1)^{n-1}\} + \cdots + a_1\{(x+1)-(x-1)\}$
> $= \boxed{}\, x^{n-1} + \cdots = 6x^2+6$
> 에서 $n=3,\ a_n=1$
> $\therefore\ f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + 1$
> $f(x+1)-f(x-1) = 6x^2 + 4a_2x + 2 + 2a_1$
> 이므로 $a_2=0,\ a_1=2$ 즉, $f(x)=x^3+2x+1$

위의 풀이 과정에서 $\boxed{}$에 알맞은 것은?

① a_n ② $2a_n$ ③ na_n ④ $2na_n$ ⑤ $3na_n$

해설

$f(x+1)-f(x-1)$
$= a_n\{(x+1)^n-(x-1)^n\}+a_{n-1}\{(x+1)^{n-1}-(x-1)^{n-1}\}\cdots$
$= a_n\{(x^n+nx^{n-1}+\cdots)-(x^n-nx^{n-1}+\cdots)\}+a_{n-1}\{(x^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots)-(x^{n-1}-(n-1)x^{n-2}+\cdots)\}+\cdots$
$= a_n(2nx^{n-1}+\cdots)+a_{n-1}\{2(n-1)x^{n-2}+\cdots\}+\cdots$
$= 2na_nx^{n-1}+\{(n-2)$차 이하의 다항식$\}$
$\therefore\ 2na_nx^{n-1}=6x^2$에서
$n-1=2,\ 2na_n=6$
$\therefore\ n=3,\ a_n=1$

9. $P(x) = \frac{1}{2}(x-1)$일 때 $\{P(x)\}^{2007}$을 $P(x^2)$으로 나눈 나머지는?

① $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$　　② $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$　　③ $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
④ $-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$　　⑤ $x - 1$

해설

$P(x^2) = \frac{1}{2}(x^2-1) = \frac{1}{2}(x-1)(x+1)$

$P(x^2)$이 이차식이므로 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x) = ax+b$라 하면

$\{P(x)\}^{2007} = \frac{1}{2}(x-1)(x+1)Q(x) + ax + b \cdots$ ㉠

$P(x) = \frac{1}{2}(x-1)$에서 $P(1) = 0,\ P(-1) = -1$

㉠에 $x = 1$을 대입하면 $a + b = 0$
㉠에 $x = -1$을 대입하면 $-a + b = -1$

$\therefore\ a = \frac{1}{2},\ b = -\frac{1}{2}$

$\therefore\ R(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

10. 다항식 $f(x)$를 $x-k$로 나눈 몫과 나머지를 $Q_1(x), R_1$이라 하고 $Q_1(x)$를 $x-k$로 나눈 몫과 나머지를 $Q_2(x), R_2$, $\cdots$, $Q_n(x)$를 $x-k$로 나눈 몫과 나머지를 $Q_{n+1}(x), R_{n+1}$이라 할 때, $f(x)$를 $(x-k)^n$으로 나눈 나머지를 $R(x)$라 하면, $R(k)$의 값은 얼마인가?

① 0 ② kR_1

③ R_1 ④ $R_1 + R_2 + \cdots + R_n$

⑤ $R_1 \cdot R_2 \cdot \cdots \cdot R_n$

해설

$$
\begin{aligned}
&f(x) = (x-k)Q_1(x) + R_1 \\
&Q_1(x) = (x-k)Q_2(x) + R_2 \\
&\qquad\vdots \\
&Q_n(x) = (x-k)Q_{n+1}(x) + R_{n+1} \\
&\therefore\ f(x) = (x-k)\{(x-k)Q_2(x) + R_2\} + R_1 \\
&\qquad\quad = (x-k)^2Q_2(x) + (x-k)R_2 + R_1 \\
&\qquad\quad = (x-k)^nQ_n(x) + (x-k)^{n-1}R_n + \cdots + (x-k)R_2 + R_1 \\
&\therefore\ R(x) = (x-k)^{n-1}R_n + \cdots + (x-k)R_2 + R_1 \\
&\therefore\ R(k) = R_1
\end{aligned}
$$