1. $i(x+2i)^2$ 이 실수가 되는 실수 x 의 값을 정하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① ± 1 ② ± 2 ③ ± 3 ④ ± 4 ⑤ ± 5

해설

$$\begin{aligned} i(x+2i)^2 &= i(x^2+4ix-4) = x^2 i - 4x - 4i \\ &= -4x + (x^2-4)i \end{aligned}$$

실수가 되려면 허수부분이 0이면 된다.

$\therefore\ x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$

2. $i^2 = -1$ 이라 할 때, 다음 중 제곱하여 음수가 되는 수의 개수는 ?

-2, $-\sqrt{2}$, $2i$, $-2i$, $3i$, $-3i$, $1-i$, $1+i$

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$i^2 = -1$ 이므로 제곱해서 음수가 되는 수는 순허수, 즉 $ai(a \neq 0)$ 의 꼴이 되어야 한다.

$\therefore$ $2i$, $-2i$, $3i$, $-3i$ 4 개,

$2, -\sqrt{2}$ 는 실수이므로

(실수)$^2 \geq 0$, $(1 \pm i)^2 = 1 \pm 2i - 1 = \pm 2i$ 가 된다.

3. $x=1+2i$, $y=\dfrac{1+2i}{1-i}$, $z=\dfrac{1-2i}{1-i}$ 일 때, $xy+xz$ 의 값을 구하면?

① $-1+3i$ ② $-1-2i$ ③ $-1+2i$
④ $-1-i$ ⑤ $-1+i$

해설

$x=1+2i,\ y=\dfrac{1+2i}{1-i},\ z=\dfrac{1-2i}{1-i}$

$$\begin{aligned}\therefore\ xy+xz &= \frac{(1+2i)^2}{1-i}+\frac{(1-2i)(1+2i)}{1-i}\\ &= \frac{-3+4i+5}{1-i}\\ &= \frac{2+4i}{1-i}\\ &= -1+3i\end{aligned}$$

4. $z=\frac{2}{1-i}$ 일 때, $2z^2-4z-1$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 2 ③ -3 ④ 4 ⑤ -5

해설

$z=\frac{2}{1-i}=1+i$

$\therefore\ 2z^2-4z-1\ =2(1+i)^2-4(1+i)-1$

$=4i-4-4i-1$

$=\ -5$

해설

$z=1+i, z-1=i$

양변을 제곱하고 정리하면

$z^2-2z=-2$

$2z^2-4z-1$

$=2(z^2-2)z-1$

$=-4-1=-5$

5. x에 대한 이차방정식 $kx^2 + 2(k+1)x + k = 0$이 중근을 가질 때 k의 값은?

① $-\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ -1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$\frac{D}{4} = b'^2 - ac = (k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$에서

중근을 가질 조건이므로

$\frac{D}{4} = 0$이어야 한다.

$2k + 1 = 0 \quad \therefore k = -\frac{1}{2}$

6. x 가 실수 일 때, 다음 중 $x+\dfrac{1}{x}$ 의 값이 될 수 <u>없는</u> 것은? (단, $x \neq 0$)

① -5 ② -2 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$x+\dfrac{1}{x}=t$ 라 하고,
양변에 x 를 곱하면
$x^2+1=tx$
$x^2-tx+1=0$ 에서 x 는 실수이므로
$D=t^2-4\geq 0 \quad \therefore t^2\geq 4,\ t\leq -2$ 또는 $t\geq 2$

7. 이차방정식 $3x^2-6x+k=0$이 허근을 갖도록 실수 k의 범위를 정하면?

① $k \le 3$ ② $k > 3$ ③ $k \le 2$ ④ $k > 2$ ⑤ $k < 1$

해설

이차방정식이 허근을 가질 조건 : $D<0$

$3x^2-6x+k=0$

$\frac{D}{4}=9-3k<0$

$\therefore\ k>3$

8. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(a-m-1)x+a^2-b+m^2=0$의 근이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 a, b값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\frac{D}{4}=(a-m-1)^2-(a^2-b+m^2)=0$

m의 값에 관계없이

$2(-a+1)m+(-2a+b+1)=0$

이어야 하므로

$2(-a+1)=0,\ -2a+b+1=0$

$\therefore a=1,\ b=1$

$\therefore a+b=2$

9. 이차식 $ax^2+4x+2a$가 x에 대한 완전제곱식이 되도록 하는 실수 a의 값은?

① ± 1 ② $\pm\sqrt{2}$ ③ ± 2 ④ $\pm\sqrt{3}$ ⑤ $\pm\sqrt{5}$

해설

주어진 식이 x에 대한 완전제곱식이 되려면
판별식 $D=0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=2^2-a\cdot 2a=0$

$4-2a^2=0,\ a^2=2$

$\therefore a=\pm\sqrt{2}$

10. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 2, 3일 때, 이차방정식 $ax^2+bx+3=0$의 두 근의 합은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

해설

$-a=2+3$, $a=-5$

$b=2\cdot 3=6$

$\therefore\ -5x^2+6x+3=0$에서

두 근의 합은 $\frac{6}{5}$

11. 이차식 x^2+2x+4 를 일차식의 곱으로 인수분해 하여라.

① $(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

② $(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})$

③ $(x+1-\sqrt{2}i)(x+1+\sqrt{2}i)$

④ $(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$

⑤ $(x-1-\sqrt{2}i)(x-1+\sqrt{2}i)$

해설

$x^2+2x+4=0$ 의 해를 구하면

$x=-1\pm\sqrt{1-4}=-1\pm\sqrt{3}i$

$\therefore x^2+2x+4$

$=\left\{x-(-1+3\sqrt{i}\right\}\left\{x-(-1-\sqrt{3}i)\right\}$

$=(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

12. $\dfrac{1}{\sqrt{-2}-\sqrt{-1}}$ 의 값은 ?

① $1-\sqrt{2}$ ② $-1-\sqrt{2}$ ③ $(1+\sqrt{2})i$

④ $-(1+\sqrt{2})i$ ⑤ $(1-\sqrt{2})i$

해설

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{-2}-\sqrt{-1}} &= \frac{1}{\sqrt{2}-1}\times\frac{1}{i}\\ &= (\sqrt{2}+1)\times(-i)\\ &= -(1+\sqrt{2})i\end{aligned}$$

13. 방정식 $a^2x+1=a(x+1)$ 의 해가 존재하지 않을 때, 상수 a 의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$a^2x+1=a(x+1)$ 에서 $a(a-1)x=a-1$

i) $a=1$ 일 때, $0\cdot x=0$ 이므로 해는 무수히 많다.

ii) $a=0$ 이면 $0\cdot x=-1$ 이므로 해가 없다.

iii) $a\neq 0, a\neq 1$ 일 때, $x=\dfrac{a-1}{a(a-1)}=\dfrac{1}{a}$

따라서 해가 없을 때의 a 의 값은 0 이다.

14. $\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(3-x)^2}=x+3$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. 이 두 실근을 α, β라 할 때, $3\alpha\beta$의 값은?

① 3　　② 5　　③ 7　　④ 9　　⑤ 11

해설

(준식)$=|x-1|+|3-x|=x+3$

i) $x<1$

$-x+1+3-x=x+3$, $3x=1$

$\therefore x=\dfrac{1}{3}$

ii) $1\le x<3$

$x-1+3-x=x+3$,

$x=-1$(해가 아니다)

iii) $x\ge 3$

$x-1-3+x=x+3x=7$

두 근이 $\dfrac{1}{3}$, 7

$\therefore 3\alpha\beta=7$

15. 이차방정식 $|x^2-5|=4x$의 모든 근의 합은?

① 5 ② 0 ③ 6 ④ 10 ⑤ 12

해설

i) $x^2-5 \ge 0 \Rightarrow x \le -\sqrt{5}$ 또는 $x \ge \sqrt{5}$ $\cdots$ ㉠

$x^2-4x-5=0$

$(x+1)(x-5)=0$

$x=-1$ 또는 5

$\Rightarrow \quad x=5$ ($\because$ ㉠)

ii) $x^2-5<0 \Rightarrow -\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$ $\cdots$ ㉡

$x^2+4x-5=0$

$(x-1)(x+5)=0$

$x=1$ 또는 -5

$\Rightarrow \quad x=1$ ($\because$ ㉡)

$\therefore$ 근의 합 : 6

16. 이차방정식 $(1-i)x^2+(1+3i)x-2(1+i)=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -4　② -3　③ -2　④ -1　⑤ 0

해설

주어진 방정식의 양변에 $1+i$를 곱하면

$(1+i)(1-i)x^2+(1+i)(1+3i)x-2(1+i)(1+i)=0$

$2x^2+(4i-2)x-2(2i)=0$

$x^2+(2i-1)x-2i=0$

$(x+2i)(x-1)=0$

$\therefore x=-2i$ 또는 $x=1$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(-2i)^2+1^2=-3$

17. 다음 방정식의 해는?

$$x^2 - 5|x| + 6 = 0$$

① $0,\ \pm 1$ ② $0,\ \pm 2$ ③ $\pm 1,\ \pm 2$

④ $\pm 2,\ \pm 3$ ⑤ $\pm 3,\ \pm 4$

해설

(i) $x^2 - 5|x| + 6 = 0$에서
$x \geq 0$일 때,
$x^2 - 5x + 6 = 0$
$(x-2)(x-3) = 0$
$\therefore x = 2$, 또는 $x = 3$
(ii) $x < 0$일 때,
$x^2 + 5x + 6 = 0$
$(x+2)(x+3) = 0$
$\therefore x = -2$, 또는 $x = -3$
(i), (ii)에서 $x = \pm 2,\ x = \pm 3$

18. 다음 방정식의 해는?

$$x^2 + 3|x| - 4 = 0$$

① 0　② ± 1　③ $\pm\sqrt{2}$　④ $\pm\sqrt{3}$　⑤ ± 2

해설

(ⅰ) $x \geq 0$일 때 $|x| = x$이므로 주어진 방정식은
$x^2 + 3x - 4 = 0, (x+4)(x-1) = 0$
$\therefore x = -4$또는 $x = 1$
이 때, $x \geq 0$이므로 $x = -4$는 부적합
$\therefore x = 1$
(ⅱ) $x < 0$일 때 $|x| = -x$이므로 주어진 방정식은
$x^2 - 3x - 4 = 0, (x-4)(x+1) = 0$
$x = 4$또는 $x = -1$
그런데 $x < 0$이므로 $x = -1$
$\therefore x = 1$또는 $x = -1$
이 때, $x < 0$이므로 $x = 4$는 부적합
(ⅰ), (ⅱ)에서 $x = \pm 1$

19. $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수를 나타낸다. $0 \le x < 2$일 때, $4[x]x^2-4x-1=0$의 해를 α라 하면 2α의 값은?

① $\sqrt{2}-1$　② $\sqrt{2}+1$　③ $\sqrt{3}+2$
④ $\sqrt{3}-1$　⑤ $\sqrt{3}-2$

해설

(i) $0 \le x < 1$일 때, $[x]=0$이므로
$-4x-1=0$
$\therefore\ x=-\frac{1}{4}$(부적합)
(ii) $1 \le x < 2$일 때, $[x]=1$이므로
$4x^2-4x-1=0$
$\therefore\ x=\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$
$1 \le x < 2$이므로 $x=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$
$\therefore\ 2\alpha=\sqrt{2}+1$

20. 방정식 $\left[x+\frac{1}{2}\right]^2-3\left[x-\frac{1}{2}\right]-7=0$의 해 $a \le x < b$ 또는 $c \le x < d$에 대하여 $a+b+c+d$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$\left[x-\frac{1}{2}\right]=\left[x+\frac{1}{2}\right]-1$이므로

$\left[x+\frac{1}{2}\right]^2-3\left[x+\frac{1}{2}\right]-4=0$

$\left[x+\frac{1}{2}\right]=4$ 또는 $\left[x+\frac{1}{2}\right]=-1$이므로

$\frac{7}{2} \le x < \frac{9}{2}, -\frac{3}{2} \le x < -\frac{1}{2}$이다

따라서 구하는 값은

$\therefore a+b+c+d=6$

21. 이차방정식 $x^2 + ax + 2b = 0$의 한 근이 $2 + ai$일 때 실수 a, b의 합 $a + b$의 값은? (단 $a \neq 0$)

① -9　　② -5　　③ 3　　④ 6　　⑤ 12

해설

한 근이 $2 + ai$이므로 다른 한 근은 $2 - ai$이다.
$\therefore$두 근의 합 $-a = 4$　$\therefore a = -4$
두 근의 곱 $(2 - 4i)(2 + 4i) = 4 + 16 = 2b$
$\therefore b = 10$　$\therefore a + b = 10 - 4 = 6$

22. a가 실수일 때, $f(x) = x^2 + 2(a+1)x + a^2$, $g(x) = x^2 + 2ax + (a-1)^2$ 에 대하여 x에 대한 두 이차방정식 $f(x) = 0, g(x) = 0$의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① $f(x) = 0$이 실근을 가지면 $g(x) = 0$도 실근을 가진다.

② $f(x) = 0$이 실근을 가지면 $g(x) = 0$은 허근을 가진다.

③ $f(x) = 0$이 허근을 가지면 $g(x) = 0$도 허근을 가진다.

④ $g(x) = 0$이 실근을 가지면 $f(x) = 0$은 허근을 가진다.

⑤ $g(x) = 0$이 허근을 가지면 $f(x) = 0$은 실근을 가진다.

해설

방정식 $f(x) = 0$과 $g(x) = 0$의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면

$\frac{D_1}{4} = (a+1)^2 - a^2 = 2a+1$,

$\frac{D_2}{4} = a^2 - (a-1)^2 = 2a-1$

모든 실수 a에 대하여

$2a+1 > 2a-1$,

즉, $D_1 > D_2$이므로 $D_1 < 0$이면 $D_2 < 0$

23. 이차방정식 $x^2 + ax + (a-4) = 0$의 근의 차가 최소가 되는 실수 a의 값을 구하면?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

$\alpha + \beta = -a,\ \alpha\beta = a - 4$

$$\begin{aligned}\therefore\ (\alpha-\beta)^2 &= (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= (-a)^2 - 4(a-4) \\ &= a^2 - 4a + 16 = (a-2)^2 + 12\end{aligned}$$

$\therefore$ 두 근의 차는 $a = 2$일 때 최소

해설

$|\alpha - \beta| = \dfrac{\sqrt{D}}{|a|}$이므로

$|\alpha - \beta| = \sqrt{a^2 - 4(a-4)} = \sqrt{(a-2)^2 + 12}$

$\therefore\ a = 2$일 때, 두 근의 차가 최소

24. 이차방정식 $-x^2+4x+a=0$의 두 근이 모두 양수이기 위한 a의 최대정수를 m, 이차방정식 $x^2+2(x+1)+k^2-9=0$의 두 근이 서로 다른 부호이기 위한 k의 최소 정수를 n이라 할 때, $m+n$의 값은?

① -8　　② -7　　③ -3　　④ -1　　⑤ 3

해설

(i) $-x^2+4x+a=0$의 두 근을 α, β라 하면
$\alpha+\beta=4$
$\alpha\beta=-a>0$에서 $a<0$
$\frac{D}{4}=4+a\geq 0$에서 $a\geq -4$
$\therefore\ -4\leq a<0$
최대정수 $m=-1$
(ii) $x^2+2x+k^2-7=0$
두 근의 곱 $k^2-7<0$
$\therefore\ -\sqrt{7}<k<\sqrt{7}$
최소의 정수 $n=-2$
$\therefore\ m+n=-3$

25. $|x|(2+3i)+2|y|(1-2i)=6-5i$를 만족하는 실수 $x,\ y$의 순서쌍 $(x,\ y)$를 꼭짓점으로 하는 다각형의 넓이는?

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

해설

$(2|x|+2|y|)+(3|x|-4|y|)i=6-5i$

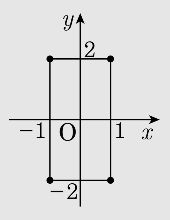
복소수의 상등에 의하여

$|x|+|y|=3,\ 3|x|-4|y|=-5$

두 식을 연립하면

$|x|=1,\ |y|=2$

$(x,\ y)\ \rightarrow\ (1,\ 2),\ (1,-2),\ (-1,\ 2),\ (-1,\ -2)$



$\therefore$ 직사각형의 넓이 $=2\times 4=8$

26. n이 짝수일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}$ 의 값은?

① -2 ② $-\sqrt{2}$ ③ 0 ④ 2 ⑤ $\sqrt{2}$

해설

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}$$

$$=\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2}\right\}^{2n}\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}+\left\{\left(\frac{1-\pi}{\sqrt{2}}\right)^{2}\right\}^{2n}\cdot\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=(\pi^2)^{2n}\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}+\{(-\pi)^2\}^{2n}-\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=\frac{1+i}{\sqrt{2}}+\frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

27. 복소수 $z=a+bi,\ w=b+ai$ ($a,\ b$는 $ab \neq 0$ 인 실수, $i=\sqrt{-1}$)에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은? (단, $\bar{z}$, $\overline{w}$ 는 각각 z, w 의 켤레복소수이다.)

① $i\bar{z}=w$

② $\dfrac{\overline{w}}{\bar{z}}=\dfrac{z}{w}$

③ $z\cdot\overline{w}=\bar{z}\cdot w$

④ $z\cdot\bar{z}=w\cdot\overline{w}$

⑤ $i(\bar{z}+\overline{w})=z+w$

해설

① : $i\bar{z}=i(a-bi)=b+ai=w$

② :①에서 $\bar{z}=-iw$ $\cdots\cdots$ ㉠

같은 방법으로 $\overline{w}=-iz$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 대입하면 $\dfrac{\overline{w}}{\bar{z}}=\dfrac{-iz}{-iw}=\dfrac{z}{w}$

③ :㉠, ㉡을 대입하면

(좌변) $=z\cdot(-iz)=-iz^2$,

(우변) $=(-iw)\cdot w=-iw^2$

∴ 좌변≠우변

④ : ②에서 $z\cdot\bar{z}=w\cdot\overline{w}$

⑤ : $i(\bar{z}+\overline{w})=i\bar{z}+i\overline{w}=w+z=z+w$

28. 방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 근을 w 라 할 때, $z=\dfrac{3w+1}{w+1}$ 이라 하면,
$z\bar{z}$ 의 값은?
(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

① 7　　② 6　　③ 5　　④ 4　　⑤ 3

해설

$x^2+x+1=0$ 의 한 근을 w 라 하면, 다른 근은 $\overline{w}$ 이다.
$w+\overline{w}=-1,\ w\overline{w}=1$

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= \frac{3w+1}{w+1}\cdot\frac{3\overline{w}+1}{\overline{w}+1} \\ &= \frac{9w\overline{w}+3(w+\overline{w})+1}{w\overline{w}+(w+\overline{w})+1} \\ &= 7 \end{aligned}$$

29. 방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 근을 w 라 할 때, $\dfrac{1}{2w^3+3w^2+4w}=aw+b$ 를 만족하는 실수 $a+b$ 의 값을 구하면?

① -1 ② -2 ③ 2 ④ 1 ⑤ $\dfrac{1}{3}$

해설

$x^2+x+1=0$ 의 한 근을 w (허근)라 하고, $w^2+w+1=0$ 에서 양변에 $w-1$ 을 곱하면,

$w^3-1=0 \quad \therefore\ w^3=1$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2w^3+3w^2+4w} &= \frac{1}{3w^2+4w+2}\\ &= \frac{1}{3(w^2+w+1)+w-1}\\ &= \frac{1}{w-1}\\ &= \frac{w+2}{(w-1)(w+2)}\\ &= \frac{w+2}{w^2+w-2}\\ &= \frac{w+2}{-3}\\ &= -\frac{1}{3}w-\frac{2}{3}\end{aligned}$$

$\therefore\ -\dfrac{1}{3}w-\dfrac{2}{3}=aw+b$ 에서

a, b 가 실수, w 는 허수이므로

$a=-\dfrac{1}{3},\ b=-\dfrac{2}{3} \quad \therefore\ a+b=-1$

30. α, β를 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$(단, $ac \neq 0$) 의 두 근이라 할 때, 다음 중 $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2, \left(\frac{1}{\beta}\right)^2$ 을 두 근으로 가지는 이차방정식은?

① $a^2x^2+(b^2-4ac)x+c^2=0$

② $a^2x^2-(b^2-2ac)x-c^2=0$

③ $c^2x^2+(b^2-4ac)x+a^2=0$

④ $c^2x^2-(b^2-2ac)x+a^2=0$

⑤ $c^2x^2+(b^2-2ac)x+a^2=0$

해설

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{1}{\beta}\right)^2=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$$

$$=\frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\cdot\frac{c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2}=\frac{b^2-2ac^2}{c^2}$$

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{\beta}\right)^2=\frac{1}{(\alpha\beta)^2}=\frac{1}{\left(\frac{c}{a}\right)^2}=\frac{a^2}{c^2}$$

따라서, 구하는 이차방정식은

$$x^2-\frac{(b^2-2ac)}{c^2}x+\frac{a^2}{c^2}=0$$

즉, $c^2x^2-(b^2-2ac)x+a^2=0$

31. x에 대한 이차방정식 $x^2 + 2kx + 6k = 0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^2 + \overline{\omega}^2 = 16$이다. 실수 k의 값은? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

방정식 $x^2 + 2kx + 6k = 0$ 이 허근을 가지므로

$\frac{D}{4} = k^2 - 6k < 0,\ \ k(k-6) < 0$

$\therefore\ 0 < k < 6$

한편, ω 가 허근이고 계수가 실수이므로 주어진 이차방정식의 다른 한 근은 $\overline{\omega}$이다.

따라서 근과 계수와의 관계에 의하여

$\omega + \overline{\omega} = -2k,\ \omega\overline{\omega} = 6k$이므로

$\omega^2 + \overline{\omega}^2 = (\omega + \overline{\omega})^2 - 2\omega\overline{\omega} = (-2k)^2 - 12k$

$= 4k^2 - 12k$

$4k^2 - 12k = 16,$

즉, $k^2 - 3k - 4 = 0$ 에서

$(k+1)(k-4) = 0 \qquad \therefore\ k = -1$ 또는 $k = 4$

$0 < k < 6$ 이므로 $k = 4$

32. 방정식 $(2+3i)z+(2-3i)\bar{z}=2$를 만족시키는 복소수z는? (단, $\bar{z}$ 는 z의 켤레복소수)

① 존재하지 않는다.
② 한 개 있다.
③ 두 개뿐이다.
④ 무수히 많이 있다.
⑤ 세 개뿐이다.

해설

$z=a+bi$ ($a,\ b$ 는 실수)라 놓으면,
$(2+3i)z+(2-3i)\bar{z}=2$ 에서
$(2+3i)(a+bi)+(2-3i)(a-bi)=2$
$2(2a-3b)=2$
$\therefore\ 2a-3b=1$ 을 만족하는 실수 $a,\ b$ 의 쌍은 무수히 많다.

33. $\sqrt{\dfrac{b+1}{a-1}} = -\dfrac{\sqrt{b+1}}{\sqrt{a-1}}$ 을 만족하는 실수 a, b 에 대하여 $\sqrt{(b-a+2)^2}+\sqrt{(2-a)^2}+\sqrt{(2+b)^2}=0$ 을 만족하는 점의 자취 $p(a,\ b)$ 의 기울기를 구하면?

① 1　② -1　③ 2　④ $\dfrac{1}{2}$　⑤ $-\dfrac{2}{3}$

해설

$\sqrt{\dfrac{b+1}{a-1}} = -\dfrac{\sqrt{b+1}}{\sqrt{a-1}}$ 에서

$a-1<0,\ b+1\ge 0 \therefore\ b\ge -1,\ a<1$

$\therefore\ b-a+2=b+1-(a-1)>0$

$a-2<0,\ 2-a>0$

$2+b>0$

$\therefore$ (준식) $=(b-a+2)+(2-a)+(b+2)$

$=2b-2a+6$

$\therefore\ 2b-2a+6=0$에서 $b=a-3$

$\therefore$ 기울기는 1

34. $x^2 + xy - 2y^2 + 2x + 7y + k = f(x, y)$ 라 할 때, $f(x, y) = 0$ 이 두 개의 직선을 나타내도록 k 의 값을 정하면?

① -5　② -4　③ -3　④ -2　⑤ -1

해설

$f(x,\ y) = x^2 + (y+2)x - 2y^2 + 7y + k = 0$

주어진 식이 두 개의 직선을 나타내려면

$x,\ y$에 관한 일차식으로 인수분해되어야 하므로

근의 공식에서 근호 안의 식 $(= D)$ 이 완전제곱꼴이어야 한다.

$D = (y+2)^2 - 4(-2y^2 + 7y + k)$

$\quad = 9y^2 - 24y + 4 - 4k \quad \cdots (\text{i})$

(i) 이 완전제곱식이어야 하므로

(i) 의 판별식

$\dfrac{D}{4} = (-12)^2 - 9(4 - 4k) = 0$

$108 + 36k = 0 \quad \therefore\ k = -3$

35. x의 방정식 $(x-a)(x-b)-cx=0$의 해가 α,β일 때, x의 방정식 $(x-\alpha)(x-\beta)+cx=0$의 해를 a,b로 나타내면?

① $-a,\ -b$　② $a,\ b$　③ $-2a,\ -2b$

④ $2a,\ 2b$　⑤ $a,\ -b$

해설

$x^2-(a+b+c)x+ab=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

$\alpha+\beta=a+b+c,\ \alpha\beta=ab$ 이것을

$x^2-(\alpha+\beta-c)x+\alpha\beta=0$에 대입하면

$x^2-(a+b)x+ab=0$

$\therefore\ (x-a)(x-b)=0$ 따라서 $x=a,\ b$