1. $(1+ai)^2 = 2i$ (a 는 실수) 라 할 때 $(1+ai)(1-ai)$ 의 값을 구하시오.
(단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$(1+ai)^2 = 2i$ 에서 $(1-a^2) + 2ai = 2i$
복소수의 상등에서 $1 - a^2 = 0,\ 2a = 2$
$\therefore\ a = 1$
$\therefore\ (1+ai)(1-ai) = (1+i)(1-i)$
$= 1 - (-1)$
$= 2$

2. $z = \dfrac{2}{1-i}$ 일 때, $2z^2 - 4z - 1$ 의 값을 구하면?

① -1　② 2　③ -3　④ 4　⑤ -5

해설

$z = \dfrac{2}{1-i} = 1 + i$

$$\begin{aligned} \therefore\ 2z^2 - 4z - 1 &= 2(1+i)^2 - 4(1+i) - 1 \\ &= 4i - 4 - 4i - 1 \\ &= \ -5 \end{aligned}$$

해설

$z = 1 + i, z - 1 = i$

양변을 제곱하고 정리하면

$z^2 - 2z = -2$

$2z^2 - 4z - 1$

$= 2(z^2 - 2)z - 1$

$= -4 - 1 = -5$

3. 복소수 z 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

보기

ㄱ $z \cdot \bar{z}$는 실수이다.

ㄴ $z + \bar{z}$는 실수이다.

ㄷ $z - \bar{z}$는 허수이다.

ㄹ $(z+1)(\bar{z}+1)$은 실수이다.

① ㄱ, ㄴ　② ㄱ, ㄹ　③ ㄴ, ㄷ

④ ㄱ, ㄴ, ㄹ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

해설

$z = a + bi$ (a, b 는 실수)로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$ 이므로

ㄱ $z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$ (실수)

ㄴ $z + \bar{z} = (a+bi) + (a-bi) = 2a$ (실수)

ㄷ $z - \bar{z} = (a+bi) - (a-bi) = 2bi$

$b = 0$ 이면 실수, $b \neq 0$ 이면 허수이다.

ㄹ $(z+1)(\bar{z}+1) = (a+bi+1)(a-bi+1)$

$$= (a+1+bi)(a+1-bi)$$

$$= (a+1)^2 + b^2 \text{ (실수)}$$

4. $z=1-i$ 일 때, $\dfrac{\overline{z}-1}{z}-\dfrac{z-1}{\overline{z}}$ 의 값은?

① $-i$ ② i ③ $-2i$ ④ $2i$ ⑤ 1

해설

$z=1-i, \overline{z}=1+i$

$\therefore$ (준식) $=\dfrac{i}{1-i}-\dfrac{-i}{1+i}=\dfrac{2i}{2}=i$

5. 제곱해서 $5-12i$ 가 되는 복소수는?

① $\pm(2+3i)$　　② $\pm(2-3i)$　　③ $\pm(3-2i)$

④ $\pm(3+3i)$　　⑤ $\pm(3+3i)$

해설

구하려는 복소수를 $a+bi$ ($a,\ b$ 는 실수)로 놓으면

$(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$ 에서

$a^2-b^2+2abi=5-12i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2=5$, $2ab=-12$ 에서

$ab=-6$, $b=-\dfrac{6}{a}$ 이므로

$a^2-\left(-\dfrac{6}{a}\right)^2=5$, $a^2-\dfrac{36}{a^2}=5$

양변에 a^2 을 곱하면

$a^4-5a^2-36=0$, $(a^2-9)(a^2+4)=0$

따라서 $a^2=9$ 또는 $a^2=-4$ 이므로

$a=\pm3$ 또는 $a=\pm2i$

그런데 a 는 실수이므로 $a=\pm3$ 이고, $b=\mp2$ 이다.

따라서 구하는 복소수는 $\pm(3-2i)$ 이다.

6. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① -2의 제곱근은 $\sqrt{2}i$와 $-\sqrt{2}i$이다.

② $\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}=-\sqrt{(-2)(-3)}$

③ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

④ $\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}}=\sqrt{\dfrac{-8}{-2}}$

⑤ $-\sqrt{-16}=-4i$

해설

③ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2i}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

7. x가 실수일 때, 복소수$(1+i)x^2+2(2+i)x+3-3i$를 제곱하면 음의 실수가 된다. 이 때, x의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

(준식)$=(x^2+4x+3)+(x^2+2x-3)i$
i가 순허수이어야 제곱하면 음이 된다.
$\therefore\ x^2+4x+3=0$이고 $x^2+2x-3\neq 0$
$x=-1$ 또는 $x=-3\cdots$㉠
$x\neq 1$ 그리고 $x\neq -3\cdots$㉡
㉠, ㉡에서 $x=-1$이다.

8. 복소수 $(1-xi)(1-i)$가 순허수가 되도록 실수 x의 값을 정하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $x=1$

해설

$(1-xi)(1-i)=(1-x)+(-1-x)i$
순허수이려면 실수부가 $0 \Rightarrow 1-x=0$,
$x=1$

9. 복소수 $x = a+bi$(a, b는 실수)가 $x^2 = 3+4i$, $x^3 = 2+11i$ 를 만족할 때 $a+b$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} x^3 &= x^2 \times x \\ &= (3+4i)(a+bi) \\ &= (3a-4b)+(4a+3b)\,i \end{aligned}$$

$(3a-4b)+(4a+3b)\,i = 2+11i$

$3a-4b = 2, 4a+3b = 11$

$\therefore a = 2, b = 1$ 이므로 $a+b = 3$

해설

$x = \dfrac{x^3}{x^2} = a+bi$

$$\begin{aligned} \frac{2+11i}{3+4i} &= \frac{(2+11i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} \\ &= \frac{50+25i}{25} \\ &= 2+i \end{aligned}$$

$\therefore a = 2, b = 1$

10. $f(x)=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1998}$ 일 때, $f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값은?

① 0 ② i ③ $-2i$ ④ -1 ⑤ -2

해설

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$ 이므로

$f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$

$=f(-i)+f(i)$

$=(-i)^{1998}+(i)^{1998}$

$=(-i)^{1996}\cdot(-i)^2+i^{1996}\cdot i^2=-2$

11. $i(x+i)^3$ 이 실수일 때, 실수 x의 값으로 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① 0　② $\sqrt{3}$　③ $-\sqrt{3}$　④ 1　⑤ -1

해설

$$i(x+i)^3 = i(x^3+3x^2i-3x-i)$$
$$= (-3x^2+1)+(x^3-3x)i$$

실수가 되기 위해서는 허수부가 0

$\therefore\ x^3-3x=0$

$x(x^2-3)=0$

$\therefore\ x=0,\ \pm\sqrt{3}$

12. n이 짝수일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}$ 의 값은?

① -2　② $-\sqrt{2}$　③ 0　④ 2　⑤ $\sqrt{2}$

해설

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}$$

$$=\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{2n}\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}+\left\{\left(\frac{1-\pi}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{2n}\cdot\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=(\pi^2)^{2n}\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}+\{(-\pi)^2\}^{2n}-\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=\frac{1+i}{\sqrt{2}}+\frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

13. $\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\dfrac{y}{x}}$가 성립할 때,

$\sqrt{(y-x+1)^2} + \sqrt[3]{x^3 - y^3 - 3xy(x-y)} + |x|$를 간단히 하면?

① $x-1$　　② $-x+1$　　③ $2y-3x+1$

④ $3x-2y-1$　　⑤ $-3x-2y-1$

해설

$\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ 일 때, $y \ge 0,\ x < 0$

(준식) $= |y-x+1| + \sqrt[3]{(x-y)^3} + |x|$

$= y-x+1+x-y-x = -x+1$

14. 복소수 α의 실수부가 양이고, $\alpha^3 = \dfrac{1+i}{1-i}$ 일 때, $\alpha + \dfrac{1}{\alpha}$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

$\alpha^3 = \dfrac{1+i}{1-i} = i$

$\alpha = a + bi$ ($a,\ b$ 는 실수, $a > 0$)라 두면

$\alpha^3 = a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i = i$

$(a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i = i$

$a^3 - 3ab^2 = 0 \cdots$ ㉠, $3a^2b - b^3 = 1 \cdots$ ㉡

㉠에서 $a^2 = 3b^2$ 을 얻어 ㉡에 대입하면

$b = \dfrac{1}{2},\ a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ \therefore\ \alpha = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

$$\begin{aligned} \alpha + \frac{1}{\alpha} &= \frac{\sqrt{3}+i}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}+i} \\ &= \frac{\sqrt{3}+i}{2} + \frac{\sqrt{3}-i}{2} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

해설

$\alpha^3 = \dfrac{1+i}{1-i} = i$

$\left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right)^3 = \alpha^3 + \dfrac{1}{\alpha^3} + 3\left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right)$

$\left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right)^3 = i + \dfrac{1}{i} + 3\left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right)$

$\left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right)^3 = 3\left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right)$

$\left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right)\left\{\left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right)^2 - 3\right\} = 0$

$\alpha + \dfrac{1}{\alpha} \neq 0, \alpha + \dfrac{1}{\alpha} > 0$

($\because$ 복소수 α 의 실수부가 양이므로)

$\therefore\ \alpha + \dfrac{1}{\alpha} = \sqrt{3}$

15. $\alpha = \dfrac{1-\sqrt{5}i}{2}$ 에 대하여 $x = \dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}$ 이라 할 때, $3x^3+4x^2+3x+3$ 의 값을 구하면?
(단, $i = \sqrt{-1}$)

① -7 ② -8 ③ -9 ④ -10 ⑤ -11

해설

$$x = \frac{\alpha+1}{\alpha-1} = \frac{\frac{3-\sqrt{5}i}{2}}{\frac{-1-\sqrt{5}i}{2}} = \frac{3-\sqrt{5}i}{-1-\sqrt{5}i}$$

$\therefore\ x = \dfrac{1+2\sqrt{5}i}{3}$ $3x-1 = (3x-1 = 2\sqrt{5}i)$, 양변을 제곱해서 정리하면

$3x^2-2x+7=0$

$3x^3+4x^2+3x+3$ 를 $3x^2-2x+7$ 로 나누면 몫이 $x+2$, 나머지가 -11 이다.

즉, $3x^3+4x^2+3x+3 = (3x^2-2x+7)(x+2)-11$

$3x^2-2x+7=0$ 이므로

$\therefore\ 3x^3+4x^2+3x+3 = -11$