

1. 등식 $\frac{a}{1+i} + \frac{b}{1-i} = -5$ 를 만족하는 두 실수 $a+b$ 의 값을 구하시오
(단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -10

해설

주어진 식의 양변에 $(1+i)(1-i)$ 를 곱하면

$$a(1-i) + b(1+i) = -10, (a+b) + (b-a)i = -10$$

$$\therefore a+b = -10, b-a = 0$$

2. $\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \cdots + \frac{1}{i^{50}}$ 의 값은?

- ① $-1+i$
- ② $-1-i$
- ③ 0
- ④ $1+i$
- ⑤ $1-i$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \cdots + \frac{1}{i^{50}} \\ & \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} \right) + \left(\frac{1}{i^5} + \frac{1}{i^6} + \frac{1}{i^7} + \frac{1}{i^8} \right) + \cdots \\ & + \left(\frac{1}{i^{45}} + \frac{1}{i^{46}} + \frac{1}{i^{47}} + \frac{1}{i^{48}} \right) + \frac{1}{i^{49}} + \frac{1}{i^{50}} \\ & = \left(\frac{1}{i} - 1 - \frac{1}{i} + 1 \right) + \left(\frac{1}{i} - 1 - \frac{1}{i} + 1 \right) + \cdots \\ & + \left(\frac{1}{i} - 1 - \frac{1}{i} + 1 \right) + \frac{1}{i} - 1 \\ & = \frac{1}{i} - 1 = -i - 1 \end{aligned}$$

3. 복소수 $z = i(a + \sqrt{5}i)^2$ 이 $z = \bar{z}$ 가 되도록 실수 a 의 값을 구하면?

- ① 5 ② $\sqrt{5}$ ③ 0 ④ ± 5 ⑤ $\pm \sqrt{5}$

해설

$$\begin{aligned} z &= i(a^2 - 5 + 2a\sqrt{5}i) \\ &= -2a\sqrt{5} + (a^2 - 5)i \\ z &= \bar{z} \text{ 이면 실수이므로 허수부분이 } 0 \text{이다.} \\ \therefore a &= \pm\sqrt{5} \end{aligned}$$

4. $z = (1+i)x^2 + (2-i)x - 8 - 2i$ 에 대하여 $z^2 < 0$ 을 만족하는 실수 x 의 값을 구하면?(단, $i = \sqrt{-1}$)

① -4 ② -2 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

해설

$$\begin{aligned} z &= (x^2 + 2x - 8) + (x^2 - x - 2)i \\ &= (x-2)(x+4) + (x+1)(x-2)i \end{aligned}$$

그런데, $z^2 < 0$ 에서 z 는 순허수이므로
 $\therefore x = -4$

5. 복소수 $z = (1+i)x + 1 - 2i$ 에 대하여 z^2 이 음의 실수일 때, 실수 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = -1$

해설

$$z = (1+i)x + 1 - 2i = (x+1) + (x-2)i$$

z^2 의 음의실수 $\Leftrightarrow z$ 가 순허수

$$\therefore x+1=0, \quad x=-1$$

6. 두 복소수 α, β 에 대하여 연산 $\odot$ 을 $\alpha \odot \beta = \alpha\beta + (\alpha + \beta)i$ 라 할 때, 등식 $(1+i) \odot z = 1$ 을 만족시키는 복소수 z 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

- ① 1
- ② **$-i$**
- ③ i
- ④ $1-i$
- ⑤ $-1+i$

해설

$\alpha \odot \beta = \alpha\beta + (\alpha + \beta)i$ 이므로
 $z = x + yi$ (단, x, y 는 실수)라 하면
 $(1+i) \odot (x+yi)$
 $= (1+i)(x+yi) + (x+1+yi+i)i$
 $= x-y + (x+y)i - (y+1) + (x+1)i$
 $= x-2y-1 + (2x+y+1)i = 1$
 $\therefore x-2y-1 = 1 \cdots \textcircled{\text{㉠}}, 2x+y+1 = 0 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$
 $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$ 에서 $x = 0, y = -1 \quad \therefore z = -i$

7. α, β 가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $\bar{\beta}$ 는 β 의 켈레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$)

보기

- ㉠ $\alpha = \bar{\beta}$ 이면 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 는 모두 실수이다.
㉡ $\alpha = \bar{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이다.
㉢ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 이면 $\alpha = 0, \beta = 0$ 이다.

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$$\alpha = a + bi \Rightarrow \bar{\beta} = a + bi$$

㉠ $\alpha + \beta = (a + bi) + (a - bi) = 2a$ 는 실수 (T), $\alpha\beta = a^2 + b^2 =$
실수

$$\text{㉡ } \alpha\beta = a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0, b = 0$$

$$\therefore \alpha = 0 \text{ (T)}$$

㉢ 반례: $\alpha = 1, \beta = i$ 일 때, $\alpha^2 + \beta^2 = 0$

8. 복소수 z 가 $z + |z| = 2 + 8i$ 를 만족시킬 때, $|z|^2$ 의 값은? (단, $z = a + bi$ (a, b 는 실수)일 때, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 이다.)

① 68 ② 100 ③ 169 ④ 208 ⑤ 289

해설

$z = a + bi$ 라 놓자.

$$z + |z| = 2 + 8i,$$

$$a + bi + \sqrt{a^2 + b^2} = 2 + 8i$$

$$a + \sqrt{a^2 + b^2} = 2, \quad b = 8$$

$$a + \sqrt{a^2 + 64} = 2$$

$$\sqrt{a^2 + 64} = 2 - a \text{ 양변제곱하면,}$$

$$a^2 + 64 = (2 - a)^2 = a^2 - 4a + 4$$

$$4a = -60, \quad a = -15$$

$$\therefore |z|^2 = a^2 + b^2 = 225 + 64 = 289$$

9. $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$, $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{c}{b}}$, $|a+b| > |c|$ 인 a, b, c 에 대하여

$\sqrt{(a+b+c)^2} - |a+b| - \sqrt{c^2}$ 의 값은?

① $2a$

② $2b$

③ $-2c$

④ $-2a$

⑤ $-3b$

해설

$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 이므로, $a \leq 0, b \leq 0$

$\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{c}{b}}$ 이므로, $b < 0, c \geq 0$

$|a+b| > |c|$ 이므로, $-(a+b) > 0$

$\therefore a+b+c < 0$

$\therefore$ (주어진 식) $= |a+b+c| - |a+b| - |c|$
 $= -(a+b+c) + (a+b) - c$
 $= -2c$

10. $x = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, y = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 다음 중에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

- $\textcircled{\tiny \Gamma} \quad x^5 + y^5 = -1$

$\textcircled{\tiny \ominus} \quad x^9 + y^9 = -1$

$\textcircled{\tiny \omin�} \quad x^{11} + y^{11} = -1$

- $\textcircled{1} \quad \textcircled{\tiny \Gamma}$

$\textcircled{2} \quad \textcircled{\tiny \Gamma}, \textcircled{\tiny \ominus}$

$\textcircled{3} \quad \textcircled{\tiny \Gamma}, \textcircled{\tiny \omin�}$
- $\textcircled{4} \quad \textcircled{\tiny \omin�}, \textcircled{\tiny \omin�}$

$\textcircled{5} \quad \textcircled{\tiny \Gamma}, \textcircled{\tiny \omin�}, \textcircled{\tiny \omin�}$

해설

$x = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, y = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$
각각 양변에 2을 곱하고 -1 을 이항한 후 양변을 제곱하여 정리하면
 $x^2 + x + 1 = 0, y^2 + y + 1 = 0$
 $x^2 = -x - 1 \cdots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 의 양변에 x 를 곱하면
 $x^3 = -x^2 - x = -(x^2 + x) = 1$ ($\because x^2 + x = -1$)
 $x^3 = 1$, y 에 대해서도 마찬가지로 하면 $y^3 = 1$
또한 $x + y = -1, xy = 1$
 $\textcircled{\tiny \Gamma} x^5 + y^5 = x^3 \cdot x^2 + y^3 \cdot y^2$
 $= x^2 + y^2$
 $= (x + y)^2 - 2xy$
 $= -1$
 $\textcircled{\tiny \ominus} x^9 + y^9 = (x^3)^3 + (y^3)^3$
 $= 1 + 1$
 $= 2$
 $\textcircled{\tiny \omin�} x^{11} + y^{11} = (x^3)^3 \times x^2 + (y^3)^3 \times y^2$
 $= x^2 + y^2$
 $= -1$
※다음과 같은 과정으로 필요한 값을 얻을 수 있다.
 $x^2 + x + 1 = 0, y^2 + y + 1 = 0$ 에서
각각 양변에 $x - 1, y - 1$ 을 곱하면
 $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0, (y - 1)(y^2 + y + 1) = 0$
 $x^3 - 1 = 0, y^3 - 1 = 0$
 $\therefore x^3 = y^3 = 1$

해설

이차방정식의 근과 계수와의 관계를 이용할 수도 있다.
 x 와 y 를 X 에 대한 이차방정식의 두 근이라고 한다면 $x + y = -1, xy = 1$ 이므로
 $X^2 + X + 1 = 0 \Rightarrow X^3 = 1 \therefore x^3 = 1, y^3 = 1$