

1. $(1+i)x^2 + (1-i)x - 6 - 2i$ 가 순허수가 되는 실수 x 의 값을 구하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 2 ⑤ 3

해설

주어진 식을 정리하면 $(x^2 + x - 6) + (x^2 - x - 2)i$ 이고
순허수가 되기 위해선 $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2) = 0$ 이어야
하므로 $x = -3$ 또는 $x = 2$ 이다.
그런데 $x^2 - x - 2 \neq 0$ 이어야 하므로 $x \neq 2$
따라서 $x = -3$

2. 등식 $\left(\frac{2+i}{1+\sqrt{2}i}\right)\left(\frac{1-4i}{1-\sqrt{2}i}\right) = a+bi$ 를 만족하는 실수 a, b 에 대하여 $a-3b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a-3b = 9$

해설

$$\begin{aligned}(\text{좌변}) &= \frac{(2+i)(1-4i)}{(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)} \\&= \frac{2-8i+i-4i^2}{1-2i^2} \\&= \frac{6-7i}{3} = 2 - \frac{7}{3}i \text{ 이므로}\end{aligned}$$

$$2 - \frac{7}{3}i = a + bi$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a = 2, b = -\frac{7}{3}$$

$$\therefore a - 3b = 2 - 3 \times \left(-\frac{7}{3}\right) = 2 + 7 = 9$$

3. 복소수 $z = i(a + \sqrt{5}i)^2$ 이 $z = \bar{z}$ 가 되도록 실수 a 의 값을 구하면?

- ① 5 ② $\sqrt{5}$ ③ 0 ④ ± 5 ⑤ $\pm \sqrt{5}$

해설

$$\begin{aligned} z &= i(a^2 - 5 + 2a\sqrt{5}i) \\ &= -2a\sqrt{5} + (a^2 - 5)i \\ z &= \bar{z} \text{ 이면 실수이므로 허수부분이 0이다.} \\ \therefore a &= \pm\sqrt{5} \end{aligned}$$

4. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{x+i}{x-i}$ 를 만족하는 실수 x 의 값은?

① 1

② $\sqrt{2}$

③ $\sqrt{3}$

④ 2

⑤ -5

해설

$$(1 + \sqrt{3}i)(x - i) = 2(x + i)$$

$$(x + \sqrt{3}) + (\sqrt{3}x - 1)i = 2x + 2i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$x + \sqrt{3} = 2x, \quad \sqrt{3}x - 1 = 2$$

$$\therefore x = \sqrt{3}$$

5. 다음 중 옳은 것은?

① $(1 + \sqrt{-1})^3 = 2i + 4$

② $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} = 2i$

③ $(-\sqrt{-3})^2 = 3$

④ $(\sqrt{-5})^3 = 5\sqrt{5}i$

⑤ $\sqrt{-3}\sqrt{-9} = -3\sqrt{3}$

해설

① $-2 + 2i$

② $-2i$

③ -3

④ $-5\sqrt{5}i$

6. $\alpha = 1 + i, \beta = 1 - i$ 일 때, $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$ 의 값을 구하면?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= 2, \alpha\beta = 2 \\ \frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} &= \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta} \\ &= \frac{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} \\ &= \frac{8 - 12}{2} \\ &= -2\end{aligned}$$

7. 다음 등식을 만족하는 실수 x 의 값을 a , y 의 값을 b 라 할 때, $a+2b$ 의 값을 구하여라.

(단, $\overline{x+yi}$ 는 $x+yi$ 의 켤레복소수이다.)

$$(2+i)(\overline{x+yi})=5(1-i)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$(2+i)(\overline{x+yi})=5(1-i)$$

$$\overline{(x+yi)}=\frac{5(1-i)}{2+i}=1-3i$$

$$x+yi=1+3i$$

$$a=1, \quad b=3$$

$$\therefore a+2b=7$$

8. 자연수 n 에 대해 $x = \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{2n} + \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n}$ 라 하자. x 가 될 수 있는 모든 수의 합을 구하면?

① $2i$ ② $-2i$ ③ 0 ④ 2 ⑤ -2

해설

$$\begin{aligned}x &= \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i} \right)^2 \right\}^n + \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i} \right)^2 \right\}^n \\&= \left(\frac{2}{2i} \right)^n + \left(\frac{2}{-2i} \right)^n \\&= \left(\frac{1}{i} \right)^n + \left(-\frac{1}{i} \right)^n = (-i)^n + i^n\end{aligned}$$

i^n 은 $n = 4k$, $n = 4k+1$, $n = 4k+2$, $n = 4k+3$ 인 경우에 따라 각각 달라지므로 (k 는 자연수)

(i) $n = 4k$ 이면 $x = 1 + 1 = 2$

(ii) $n = 4k+1$ 이면 $x = -i + i = 0$

(iii) $n = 4k+2$ 이면 $x = -1 - 1 = -2$

(iv) $n = 4k+3$ 이면 $x = i - i = 0$

$\therefore x = 2, 0, -2$

따라서, x 가 될 수 있는 모든 수의 합은 0

9. $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$, $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{c}{b}}$, $|a+b| > |c|$ 인 a, b, c 에 대하여

$\sqrt{(a+b+c)^2} - |a+b| - \sqrt{c^2}$ 의 값은?

- ① $2a$ ② $2b$ ③ $-2c$ ④ $-2a$ ⑤ $-3b$

해설

$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 이므로, $a \leq 0, b \leq 0$

$\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{c}{b}}$ 이므로, $b < 0, c \geq 0$

$|a+b| > |c|$ 이므로, $-(a+b) > 0$

$\therefore a+b+c < 0$

$\therefore$ (주어진 식) $= |a+b+c| - |a+b| - |c|$
 $= -(a+b+c) + (a+b) - c$
 $= -2c$

10. 실수가 아닌 복소수 z 가 $z^5 = 1$ 일 때,
 $(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)$ 의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ -1 ④ 5 ⑤ -5

해설

$$\begin{aligned} z^5 &= 1 \text{ 이므로 } z^5 - 1 = 0 \text{ 에서} \\ (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) &= 0 \\ z \neq 1 \text{ 이므로 } z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 &= 0 \\ (\text{준식}) &= (1-z)(1-z^4)(1-z^2)(1-z^3) \\ &= (2-z-z^4)(2-z^2-z^3) \\ &= 4-(z+z^2+z^3+z^4) \\ &= 5 \end{aligned}$$