**1.** 삼차함수 $f(x) = ax^3 + b$ 의 역함수$f^{-1}$ 가$f^{-1}(5) = 2$ 를 만족시킬 때, $8a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

역함수의 성질에서 $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$
즉 $f^{-1}(5) = 2 \quad \Rightarrow \quad f(2) = 5$ 이다.
따라서, $f(x) = ax^3 + b$ 에서
$\therefore f(2) = 8a + b = 5$

**2.** 다음에서 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수를 모두 고른 것은?

| | |
|---|---|
| ㉠ $f(x) = x + 2$ | ㉡ $f(x) = -x - 1$ |
| ㉢ $f(x) = \frac{1}{x}$ | ㉣ $f(x) = 2x$ |

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉣ ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉡, ㉣

해설

$(f \circ f)(x) = x$ 인지 확인한다.
㉠ $(f \circ f)(x) = x + 4$
㉡ $(f \circ f)(x) = x$
㉢ $(f \circ f)(x) = x$
㉣ $(f \circ f)(x) = 4x$
따라서 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수는 ㉡, ㉢이다.

**3.** $x = ab,\ y = a^2 + b^2$이고 $a + b = 5,\ ab = 3$일 때, $\sqrt{(x-y)^2} + \sqrt{(x+y)^2}$의 값은? (단, $a,\ b$는 실수)

① 6　② 8　③ 32　④ 38　⑤ 40

해설

$x = ab = 3$

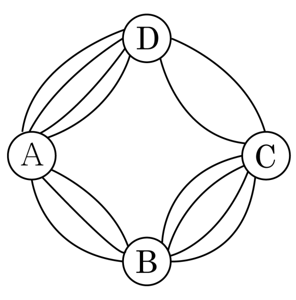
$y = a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 25 - 6 = 19$

$x - y < 0,\ x + y > 0$이므로

(준식) $= |x-y| + |x+y|$

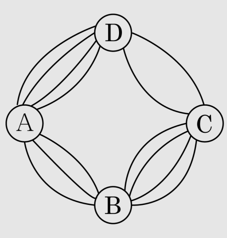
$= -(x-y) + (x+y) = 2y = 38$

**4.** 4개의 도시 $A, B, C, D$ 사이에 그림과 같은 도로가 있다. 갑, 을 두 사람이 $A$ 에서 출발하여 $B$ 또는$D$ 를 통과하여 $C$ 로 가는 방법이 수는? (단, 한 사람이 통과한 곳은 다른 사람이 통과할 수 없다.)




① 114　② 152　③ 192　④ 214　⑤ 298

해설




$A \to B \to C$ 로 가는 방법 : $3 \times 4 = 12$
$A \to D \to C$ 로 가는 방법 : $4 \times 2 = 8$
( i ) 갑이 $A \to B \to C$ 로 가고,
을은 $A \to B \to C$ 로 가는 경우
$12 \times 8 = 96$
( ii ) 을이 $A \to B \to C$ 로 가고,
갑은 $A \to B \to C$ 로 가는 경우
$8 \times 12 = 96$
따라서, 구하는 방법의 수는 $96 + 96 = 192$

**5.** 50 원, 100 원, 500 원짜리 동전만 사용할 수 있는 자동판매기에서 400 원짜리 음료수 3 개를 선택하려고 한다. 세 종류의 동전을 모두 사용하여 거스름돈 없이 자동판매기에 동전을 넣는 방법의 수는? (단, 동전을 넣는 순서는 고려하지 않는다.)

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

500 원을 기준으로 생각한다. 100 원을 $A$, 50 원을 $B$ 라 하면,
(1) 500 원 1 개 :
$(A, B) = (6, 2),\ (5, 4),\ (4, 6),$
$(3, 8),\ (2, 10),\ (1, 12)$
(2) 500 원 2 개 : $(A, B) = (1, 2)$
$\therefore$ 총 7 가지

**6.** $1, 2, 3, 4, 5$ 를 일렬로 나열하여 다섯 자리의 정수 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$ 를 만들 때, $a_i = i$ 가 되지 않는 정수의 개수를 구하여라. (단, $i = 1, 2, 3, 4, 5$)

▶ 답： ______ 개

▷ 정답： 44 개

해설

$a_1 = 1$ 이 아니므로 $a_1$ 이 2, 3, 4, 5인 경우에 대하여 $a_2, a_3, a_4, a_5$ 를 각각 구해보면
정수의 개수는 44 개이다.

**7.** $A$, $B$, $C$, $D$ 4 명을 일렬로 세울 때, $A$ 가 가장 뒤에 서는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답: ______ 가지

▷ 정답: 6 가지

해설

세명을 일렬로 세우는 경우와 같다.

$3! = 6$

**8.** 0, 0, 1, 2, 3, 4를 써 놓은 6장의 카드 중에서 3장을 뽑아 나열하여 세 자리 정수를 만들 때, 짝수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 34 개

해설

1의 자리에 0, 2, 4가 오면 짝수이므로

$\times\times 0$ 의 꼴 $\rightarrow 4\times 4$ , $\times\times 2$ 의 꼴 $\rightarrow 3\times 3$ , $\times\times 4$ 의 꼴 $\rightarrow 3\times 3$

따라서 짝수의 개수는 $4\times 4+3\times 3+3\times 3=34$ (개)

**9.** 다음 등식 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① ${}_{n}C_0 = {}_{n}C_n$

② ${}_{n}P_r = {}_{n}C_r \times r!$

③ ${}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1} = {}_{n}C_r$

④ ${}_{n+1}C_r = {}_{n+1}C_{n-r}$

⑤ ${}_{n}C_r = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$

해설

④ ${}_{n+1}C_r = {}_{n+1}C_{n+1-r}$ (거짓)

**10.** 두 집합 $A = \{-1,\ 0,\ 1\}$, $B = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1, 2\}$ 에서 $A$ 의 모든 원소 $x$ 에 대하여 $f(x) = f(x^2)$ 으로 되는 $A$ 에서 $B$ 로의 함수 $f$ 의 개수는?

① 12 개 ② 20 개 ③ 25 개 ④ 27 개 ⑤ 30 개

해설

$f(-1) = f(1), f(0) = f(0)$ 이므로
$A$ 의 원소 1 이 대응하는 방법의 수는 5 가지
$A$ 의 원소 0 이 대응하는 방법의 수는 5 가지
$\therefore 5 \times 5 = 25$ (가지)

**11.** 두 함수 $f(x)=3x-1$, $g(x)=-x+2$ 에 대하여 $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(1)$ 의 값은?

① $-4$ ② $-2$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ $0$ ⑤ $1$

해설

$g^{-1}(x)=-x+2$

$$\begin{aligned} g^{-1}(f(x)) &= g^{-1}(3x-1)=-(3x-1)+2 \\ &= -3x+3 \end{aligned}$$

$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$ 이므로

$$\begin{aligned} (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(1) &= (f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(1) \\ &= (g^{-1}\circ f)(1) \\ &= g^{-1}(f(1))=0 \end{aligned}$$

**12.** $x=\sqrt{3-\sqrt{8}}$일 때 $\dfrac{x^3+x^2-3x+6}{x^4+2x^3+2x+9}$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ $\dfrac{1}{4}$ ⑤ $\dfrac{1}{3}$

해설

$x=\sqrt{3-\sqrt{8}}=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$ 에서

$x+1=\sqrt{2}\ \rightarrow\ x^2+2x-1=0$

분자 : $x^3+x^2-3x+6$

$=(x^2+2x-1)(x-1)+5=5$

분모 : $x^4+2x^3+2x+9$

$=(x^2+2x-1)(x^2+1)+10=10$

$\therefore$ 준식 $=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$

**13.** 함수 $f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x} & (x \geq 0) \\ \sqrt{2 - x} & (x < 0) \end{cases}$ 에 대하여
$(f \circ f)(k) = 2$ 일 때, 상수 $k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$(f \circ f)(k) = f(f(k)) = 2$ 에서
$f(k) = k'$ 이라 하면 $f(k') = 2$
i) $k' \geq 0$ 이면
$y = 1 - \sqrt{x}$이고, $y \leq 1$ 이므로
함숫값이 2 가 될 수 없다.
$\therefore\ k' < 0$
ii) $k' < 0$ 이므로
$f(k') = \sqrt{2 - k'} = 2$
$2 - k' = 4 \quad \therefore\ k' = -2$
$f(k) = -2$ 인 $k$ 의 값을 구하면 된다.
iii) $k < 0$ 이면
$y = \sqrt{2 - x}\ (x < 0)$ 이고, $y > \sqrt{2}$ 이므로
함숫값이 $-2$ 가 될 수 없다.
$\therefore\ k \geq 0$
iv) $k \geq 0$ 이므로
$f(k) = 1 - \sqrt{k} = -2$
$\therefore\ k = 9$

**14.** $A$, $B$ 두 사람이 놀이공원에서 'Big3' 라는 입장권을 구입하였다. 이 입장권은 10 개의 놀이기구 중에서 서로 다른 3 개의 놀이기구를 한 번씩만 이용할 수 있다. 놀이기구를 3 번 모두 이용한다고 할 때, $A$, $B$ 두 사람이 이 입장권으로 놀이기구를 이용할 수 있는 모든 경우의 수는? (단, 놀이기구의 정원은 2 명 이상이며 이용하는 순서는 상관하지 않는다.)

① 840 ② 2520 ③ 3600
④ 7200 ⑤ 14400

해설

10 개의 놀이기구 중에서 서로 다른 3 개를
택하는 경우의 수는
$${}_{10}C_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120(\text{가지})$$
따라서, $A, B$ 두 사람이 이용할 수 있는 경우는
각각 120 가지이므로 구하는경우의 수는
$120 \times 120 = 14400$

**15.** 비례식 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}(\neq 1)$가 성립할 때, 다음 등식 중 성립하는 것의 개수를 구하면? (단, $mb+nd\neq 0, b+d+f\neq 0$ )

| |
|---|
| ㉠ $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$<br>㉡ $\frac{2a+3b}{a-b}=\frac{2c+3d}{c-d}$<br>㉢ $\frac{a}{b}=\frac{ma+nc}{mb+nd}$<br>㉣ $\frac{ab+cd}{ab-cd}=\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}$<br>㉤ $\frac{a^3}{b^2}+\frac{c^3}{d^2}+\frac{e^3}{f^2}=\frac{(a+c+e)^3}{(b+d+f)^2}$ |

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$로 놓으면

$a=bk,\ c=dk,\ e=fk$

㉠ (좌변)$=\frac{bk+b}{bk-b}=\frac{k+1}{k-1}$

(우변)$=\frac{dk+d}{dk-d}=\frac{k+1}{k-1}$

$\therefore$ (좌변)$=$ (우변)

㉡ (좌변)$=\frac{2bk+3b}{bk-b}=\frac{2k+3}{k-1}$

(우변)$=\frac{2dk+3d}{dk-d}=\frac{2k+3}{k-1}$

$\therefore$ (좌변)$=$ (우변)

㉢ (좌변)$=\frac{bk}{b}=k$

(우변)$=\frac{mbk+ndk}{mb+nd}=k$

$\therefore$ (좌변)$=$ (우변)

㉣ (좌변)$=\frac{bk\cdot b+dk\cdot d}{bk\cdot b-dk\cdot d}=\frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}$

(우변)$=\frac{b^2k^2+d^2k^2}{b^2k^2-d^2k^2}=\frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}$

$\therefore$ (좌변)$=$ (우변)

㉤ (좌변)$=\frac{b^3k^3}{b^2}+\frac{d^3k^3}{d^2}+\frac{f^3k^3}{f^2}=(b+d+f)k^3$

(우변)$=\frac{(bk+dk+fk)^3}{(b+d+f)^2}=(b+d+f)k^3$

$\therefore$ (좌변)$=$ (우변)

따라서, ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤ 모두 성립한다.