

1. 삼차함수 $f(x) = ax^3 + b$ 의 역함수 f^{-1} 가 $f^{-1}(5) = 2$ 를 만족시킬 때, $8a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

역함수의 성질에서 $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$

즉 $f^{-1}(5) = 2 \Rightarrow f(2) = 5$ 이다.

따라서, $f(x) = ax^3 + b$ 에서

$$\therefore f(2) = 8a + b = 5$$

2. 다음에서 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수를 모두 고른 것은?

㉠ $f(x) = x + 2$

㉡ $f(x) = -x - 1$

㉢ $f(x) = \frac{1}{x}$

㉤ $f(x) = 2x$

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉠, ㉤

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉡, ㉤

해설

$(f \circ f)(x) = x$ 인지 확인한다.

㉠ $(f \circ f)(x) = x + 4$

㉡ $(f \circ f)(x) = x$

㉢ $(f \circ f)(x) = x$

㉤ $(f \circ f)(x) = 4x$

따라서 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수는 ㉡, ㉢이다.

3. $x = ab$, $y = a^2 + b^2$ 이고 $a + b = 5$, $ab = 3$ 일 때, $\sqrt{(x-y)^2} + \sqrt{(x+y)^2}$ 의 값은? (단, a, b 는 실수)

① 6

② 8

③ 32

④ 38

⑤ 40

해설

$$x = ab = 3$$

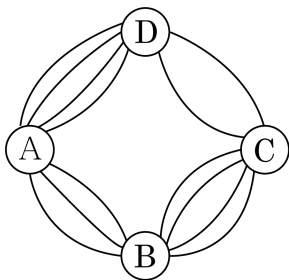
$$y = a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 25 - 6 = 19$$

$x - y < 0$, $x + y > 0$ 이므로

$$(\text{준식}) = |x - y| + |x + y|$$

$$= -(x - y) + (x + y) = 2y = 38$$

4. 4개의 도시 A, B, C, D 사이에 그림과 같은 도로가 있다. 갑, 을 두 사람이 A 에서 출발하여 B 또는 D 를 통과하여 C 로 가는 방법이 수는? (단, 한 사람이 통과한 곳은 다른 사람이 통과할 수 없다.)



① 114

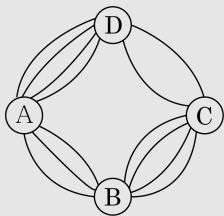
② 152

③ 192

④ 214

⑤ 298

해설



$A \rightarrow B \rightarrow C$ 로 가는 방법 : $3 \times 4 = 12$

$A \rightarrow D \rightarrow C$ 로 가는 방법 : $4 \times 2 = 8$

(i) 갑이 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 로 가고,

을은 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 로 가는 경우

$$12 \times 8 = 96$$

(ii) 을이 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 로 가고,

갑은 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 로 가는 경우

$$8 \times 12 = 96$$

따라서, 구하는 방법의 수는 $96 + 96 = 192$

5. 50 원, 100 원, 500 원짜리 동전만 사용할 수 있는 자동판매기에서 400 원짜리 음료수 3 개를 선택하려고 한다. 세 종류의 동전을 모두 사용하여 거스름돈 없이 자동판매기에 동전을 넣는 방법의 수는? (단, 동전을 넣는 순서는 고려하지 않는다.)

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

500 원을 기준으로 생각한다. 100 원을 A , 50 원을 B 라 하면,

(1) 500 원 1 개 :

$(A, B) = (6, 2), (5, 4), (4, 6),$

$(3, 8), (2, 10), (1, 12)$

(2) 500 원 2 개 : $(A, B) = (1, 2)$

$\therefore$ 총 7가지

6. 1, 2, 3, 4, 5 를 일렬로 나열하여 다섯 자리의 정수 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 를 만들 때, $a_i = i$ 가 되지 않는 정수의 개수를 구하여라. (단, $i = 1, 2, 3, 4, 5$)

▶ 답: 개

▷ 정답: 44개

해설

$a_1 = 1$ 이 아니므로 a_1 이 2, 3, 4, 5인 경우에 대하여 a_2, a_3, a_4, a_5 를 각각 구해보면
정수의 개수는 44개이다.

7. A, B, C, D 4 명을 일렬로 세울 때, A 가 가장 뒤에 서는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 6가지

해설

세명을 일렬로 세우는 경우와 같다.

$$3! = 6$$

8. 0, 0, 1, 2, 3, 4를 써 놓은 6장의 카드 중에서 3장을 뽑아 나열하여 세 자리 정수를 만들 때, 짝수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 34 개

해설

1의 자리에 0, 2, 4가 오면 짝수이므로

$\times \times 0$ 의 꼴 $\rightarrow 4 \times 4$, $\times \times 2$ 의 꼴 $\rightarrow 3 \times 3$, $\times \times 4$ 의 꼴 $\rightarrow 3 \times 3$

따라서 짝수의 개수는 $4 \times 4 + 3 \times 3 + 3 \times 3 = 34$ (개)

9. 다음 등식 중 옳지 않은 것은?

① ${}_nC_0 = {}_nC_n$

② ${}_nP_r = {}_nC_r \times r!$

③ ${}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1} = {}_nC_r$

④ ${}_{n+1}C_r = {}_{n+1}C_{n-r}$

⑤ ${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

해설

④ ${}_{n+1}C_r = {}_{n+1}C_{n+1-r}$ (거짓)

10. 두 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에서 A 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x) = f(x^2)$ 으로 되는 A 에서 B 로의 함수 f 의 개수는?

① 12 개

② 20 개

③ 25 개

④ 27 개

⑤ 30 개

해설

$f(-1) = f(1), f(0) = f(0)$ 이므로

A 의 원소 1 이 대응하는 방법의 수는 5 가지

A 의 원소 0 이 대응하는 방법의 수는 5 가지

$\therefore 5 \times 5 = 25$ (가지)

11. 두 함수 $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = -x + 2$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(1)$ 의 값은?

- ① -4 ② -2 ③ $-\frac{4}{3}$ ④ 0 ⑤ 1

해설

$$g^{-1}(x) = -x + 2$$

$$\begin{aligned} g^{-1}(f(x)) &= g^{-1}(3x - 1) = -(3x - 1) + 2 \\ &= -3x + 3 \end{aligned}$$

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} (f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(1) &= (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(1) \\ &= (g^{-1} \circ f)(1) \\ &= g^{-1}(f(1)) = 0 \end{aligned}$$

12. $x = \sqrt{3 - \sqrt{8}}$ 일 때 $\frac{x^3 + x^2 - 3x + 6}{x^4 + 2x^3 + 2x + 9}$ 의 값은?

① 1

② 2

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{1}{4}$

⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$$x = \sqrt{3 - \sqrt{8}} = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \text{ 에서}$$

$$x + 1 = \sqrt{2} \rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\text{분자 : } x^3 + x^2 - 3x + 6$$

$$= (x^2 + 2x - 1)(x - 1) + 5 = 5$$

$$\text{분모 : } x^4 + 2x^3 + 2x + 9$$

$$= (x^2 + 2x - 1)(x^2 + 1) + 10 = 10$$

$$\therefore \text{준식} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

13. 함수 $f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x} & (x \geq 0) \\ \sqrt{2-x} & (x < 0) \end{cases}$ 에 대하여

$(f \circ f)(k) = 2$ 일 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$(f \circ f)(k) = f(f(k)) = 2 \text{ 에서}$$

$$f(k) = k' \text{ 이라 하면 } f(k') = 2$$

i) $k' \geq 0$ 이면

$$y = 1 - \sqrt{x} \text{ 이고, } y \leq 1 \text{ 이므로}$$

함숫값이 2 가 될 수 없다.

$$\therefore k' < 0$$

ii) $k' < 0$ 이므로

$$f(k') = \sqrt{2 - k'} = 2$$

$$2 - k' = 4 \quad \therefore k' = -2$$

$f(k) = -2$ 인 k 의 값을 구하면 된다.

iii) $k < 0$ 이면

$$y = \sqrt{2 - x} \text{ (} x < 0 \text{) 이고, } y > \sqrt{2} \text{ 이므로}$$

함숫값이 -2 가 될 수 없다.

$$\therefore k \geq 0$$

iv) $k \geq 0$ 이므로

$$f(k) = 1 - \sqrt{k} = -2$$

$$\therefore k = 9$$

14. A, B 두 사람이 놀이공원에서 'Big3' 라는 입장권을 구입하였다. 이 입장권은 10 개의 놀이기구 중에서 서로 다른 3 개의 놀이기구를 한번씩만 이용할 수 있다. 놀이기구를 3 번 모두 이용한다고 할 때, A, B 두 사람이 이 입장권으로 놀이기구를 이용할 수 있는 모든 경우의 수는? (단, 놀이기구의 정원은 2 명 이상이며 이용하는 순서는 상관하지 않는다.)

① 840

② 2520

③ 3600

④ 7200

⑤ 14400

해설

10 개의 놀이기구 중에서 서로 다른 3 개를
택하는 경우의 수는

$${}_{10}C_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120(\text{가지})$$

따라서, A, B 두 사람이 이용할 수 있는 경우는
각각 120 가지이므로 구하는 경우의 수는

$$120 \times 120 = 14400$$

15. 비례식 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} (\neq 1)$ 가 성립할 때, 다음 등식 중 성립하는 것의 개수를 구하면? (단, $mb + nd \neq 0, b + d + f \neq 0$)

$$\begin{aligned} \textcircled{㉠} & \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \\ \textcircled{㉡} & \frac{2a+3b}{a-b} = \frac{2c+3d}{c-d} \\ \textcircled{㉢} & \frac{a}{b} = \frac{ma+nc}{mb+nd} \\ \textcircled{㉣} & \frac{ab+cd}{a^3+\frac{c}{d}} = \frac{a^2+c^2}{e^3-c^2} \\ \textcircled{㉤} & \frac{a^3}{b^2} + \frac{c^3}{d^2} + \frac{e^3}{f^2} = \frac{(a+c+e)^3}{(b+d+f)^2} \end{aligned}$$

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k \text{로 놓으면}$$

$$a = bk, c = dk, e = fk$$

$$\textcircled{㉠} \text{ (좌변)} = \frac{bk+b}{bk-b} = \frac{k+1}{k-1}$$

$$\text{ (우변)} = \frac{dk+d}{dk-d} = \frac{k+1}{k-1}$$

$$\therefore \text{ (좌변)} = \text{ (우변)}$$

$$\textcircled{㉡} \text{ (좌변)} = \frac{2bk+3b}{bk-b} = \frac{2k+3}{k-1}$$

$$\text{ (우변)} = \frac{2dk+3d}{dk-d} = \frac{2k+3}{k-1}$$

$$\therefore \text{ (좌변)} = \text{ (우변)}$$

$$\textcircled{㉢} \text{ (좌변)} = \frac{bk}{b} = k$$

$$\text{ (우변)} = \frac{mbk+ndk}{mb+nd} = k$$

$$\therefore \text{ (좌변)} = \text{ (우변)}$$

$$\textcircled{㉣} \text{ (좌변)} = \frac{bk \cdot b + dk \cdot d}{bk \cdot b - dk \cdot d} = \frac{b^2 + d^2}{b^2 - d^2}$$

$$\text{ (우변)} = \frac{b^2k^2 + d^2k^2}{b^2k^2 - d^2k^2} = \frac{b^2 + d^2}{b^2 - d^2}$$

$$\therefore \text{ (좌변)} = \text{ (우변)}$$

$$\textcircled{㉤} \text{ (좌변)} = \frac{b^3k^3}{b^2} + \frac{d^3k^3}{d^2} + \frac{f^3k^3}{f^2} = (b+d+f)k^3$$

$$\text{ (우변)} = \frac{(bk+dk+fk)^3}{(b+d+f)^2} = (b+d+f)k^3$$

$$\therefore \text{ (좌변)} = \text{ (우변)}$$

따라서, ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤ 모두 성립한다.