

1. 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① 5는 5의 약수이다.
- ② 6은 6의 배수이다.
- ③ 1은 모든 자연수의 약수이다.
- ④ 15는 15의 배수인 동시에 약수이다.
- ⑤ 7은 7의 약수이지만 배수는 아니다.

해설

모든 자연수는 자기 자신의 약수인 동시에 배수이다. 따라서 ⑤이다.

2. 다음 <보기> 중 소인수분해를 올바르게 한 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $45 = 3^2 \times 5$

㉡ $28 = 2^2 \times 7$

㉢ $150 = 2 \times 3^2 \times 7$

㉣ $512 = 2^9$

㉤ $72 = 2^2 \times 3^3$

㉥ $96 = 2^5 \times 3$

① ㉠,㉡,㉣,㉤

② ㉡,㉣,㉤,㉥

③ ㉠,㉡,㉣,㉥

④ ㉡,㉣,㉤,㉥

⑤ ㉠,㉣,㉤,㉥

해설

㉢ $150 = 2 \times 3 \times 5^2$

㉤ $72 = 2^3 \times 3^2$

3. 다음 중 $2^4 \times 3^2 \times 5^3$ 의 소인수를 모두 구한 것은?

㉠ 2, 3, 5

㉡ 2, 3

㉢ 2

㉣ 3, 5

㉤ $2^3, 5$

해설

$2^4 \times 3^2 \times 5^3$ 이므로 소인수는 2, 3, 5이다.

4. $3^a \times 5^b$ 이 $3^3 \times 5$ 를 약수로 가질 때, 두 자연수 a, b 의 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$3^a \times 5^b$ 이 $3^3 \times 5$ 를 약수로 가지므로, a 는 3 이상의 자연수, b 는 1 이상의 자연수가 되어야 한다.

그 중 최솟값은 $a = 3, b = 1$ 일 때이다.

$\therefore a + b = 3 + 1 = 4$

5. A 가 60의 약수의 모임일 때, A 의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

A 는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60이므로 A 의 개수는 12개이다.

6. $3^2 \times 5^2 \times 7^3$, $2^4 \times 3^2 \times 5^2$ 의 최대공약수는?

① $2^2 \times 3^2$

② 5×7^2

③ $2^3 \times 3^2 \times 7$

④ $2^2 \times 3 \times 7^2$

⑤ $3^2 \times 5^2$

해설

공통인 소인수를 모두 곱하는데 지수가 같으면 그대로, 다른 작은 쪽을 택하여 곱한다.

$\therefore 3^2 \times 5^2 \times 7^3$, $2^4 \times 3^2 \times 5^2$ 의 최대공약수 : $3^2 \times 5^2$

7. 두 수 $2^4 \times 5^3$, $2^a \times 3^2 \times 5^b$ 의 최대공약수가 50 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

최대공약수가 $50 = 2 \times 5^2$ 이고
 $2^4 \times 5^3$ 에서 2 의 지수가 4 이므로
 $2^a \times 3^2 \times 5^b$ 에서 2 의 지수가 1 이어야 한다.
같은 방식으로
 $2^4 \times 5^3$ 에서 5 의 지수가 3 이므로
 $2^a \times 3^2 \times 5^b$ 에서 5 의 지수가 2 이어야 한다.
따라서 $a = 1$, $b = 2$

8. 두 자연수의 최소공배수가 72 일 때, 두 수의 공배수 중 200 보다 작은 수를 모두 고르면?(정답 2개)

① 36 ② 72 ③ 104 ④ 144 ⑤ 180

해설

공배수는 최소공배수의 배수이므로 최소공배수인 72 의 배수 72 , 144 , 216 , 288 , 360 , ... 중 200 보다 작은 수는 72 , 144 이다.

9. 세 수 42, 70, 98 의 최대공약수를 a , 최소공배수를 b 라 할 때, $b - a$ 의 값은?

① 1456 ② 1460 ③ 1462 ④ 1468 ⑤ 1470

해설

$$42 = 2 \times 3 \times 7$$

$$70 = 2 \times 5 \times 7$$

$$98 = 2 \times 7^2 \text{ 에서}$$

최대공약수는 2×7 , 최소공배수는 $2 \times 3 \times 5 \times 7^2$ 이므로

$$a = 14, b = 1470 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } b - a = 1470 - 14 = 1456 \text{ 이다.}$$

10. n 이 자연수일 때, $\frac{18}{n}$ 도 자연수가 된다. 이러한 n 의 값의 합은?

- ① 20 ② 21 ③ 33 ④ 39 ⑤ 49

해설

18의 약수는 1, 2, 3, 6, 9, 18이다.
따라서 n 의 값의 합은 $1+2+3+6+9+18=39$

11. 다음 식을 만족하는 a, b, c 의 곱은?

$$1 \times 2 \times 4 \times 5 \times 10 \times 20 = 2^a \times 3^b \times 5^c$$

- ① 0 ② 1 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

해설

$$\begin{aligned} 1 \times 2 \times (2 \times 2) \times 5 \times (2 \times 5) \times (2 \times 2 \times 5) &= 2^6 \times 3^0 \times 5^3 \\ \therefore a = 6, b = 0, c = 3 \\ \therefore 6 \times 0 \times 3 &= 0 \end{aligned}$$

12. $27 \times \square$ 는 약수의 개수가 12개인 가장 작은 자연수이다. \square 안에 들어갈 가장 작은 자연수는?

- ① 2 ② 2^2 ③ 2^3 ④ 3 ⑤ 3^2

해설

$3^3 \times \square$ 에서 $\square = a^x$ 이라 하면 약수의 개수는 $(3+1) \times (x+1) = 12$ (개) 이므로

$$(3+1) \times (x+1) = 4 \times (x+1) = 12$$

$$x+1 = 3 \quad \therefore x = 2$$

a 가 될 수 있는 가장 작은 소인수는 2 이므로

$$\square = 2^2$$

13. 세 자연수 45, A, 90의 최대공약수가 15일 때, A가 될 수 있는 값 중 가장 큰 두 자리 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 75

해설

A는 15를 약수로 갖고 있으므로, 두 자리 자연수인 15의 배수를 나열해 보면 다음과 같다.

15, 30, 45, 60, 75, 90

이 중, 45, 90과의 최대공약수가 15가 될 수 있는 자연수는 15, 30, 60, 75이다.

이 중 가장 큰 수는 75이다.

14. $2^2 \times 3^4$, $2^2 \times 3^2 \times 5$ 의 공약수의 개수는?

- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 9 ⑤ 12

해설

$2^2 \times 3^4$, $2^2 \times 3^2 \times 5$ 의 최대공약수는 $2^2 \times 3^2$
공약수는 최대공약수의 약수이므로,
1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 총 9개이다.

15. 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① 12, 10, 4 의 최소공배수는 60 이다.
- ② 4, 5, 10 의 최소공배수는 20 이다.
- ③ 2, 3, 6 의 최소공배수는 6 이다.
- ④ 12, 24, 6 의 최소공배수는 24 이다.
- ⑤ 14, 6, 8 의 최소공배수는 100 이다.

해설

$$\begin{array}{r} 2) 14 \quad 6 \quad 8 \\ \quad 7 \quad 3 \quad 4 \end{array}$$

∴ 최소공배수는 $2 \times 7 \times 3 \times 4 = 168$ 이다.

16. 가로 길이가 90cm, 세로 길이가 144cm 인 직사각형 모양의 벽에 같은 크기의 정사각형 모양의 타일을 빈틈없이 붙이려고 한다. 가능한 한 큰 타일을 붙이려면 타일의 한 변의 길이는 몇 cm 이어야 하는가? 또, 몇 개의 타일이 필요한가?

- ① 18cm, 35 개 ② 12cm, 35 개 ③ 18cm, 40 개
④ 12cm, 40 개 ⑤ 15cm, 30 개

해설

타일의 한 변의 길이를 x cm 라 할 때,
 $90 = x \times \square$, $144 = x \times \Delta$
 x 는 90 과 144 의 최대공약수
 $90 = 2 \times 3^2 \times 5$, $144 = 2^4 \times 3^2$
 $\therefore x = 2 \times 3^2 = 18$ (cm)
 $90 = 18 \times 5$, $144 = 18 \times 8$ 이므로
필요한 타일의 개수는 $\therefore 5 \times 8 = 40$ (개)

17. 세 변의 길이가 각각 66m, 84m, 78m 인 삼각형 모양의 목장이 있다. 이 목장의 가장자리를 따라 일정한 간격으로 향나무를 심으려고 한다. 세 모퉁이는 반드시 향나무를 심어야 하며 나무의 개수는 될 수 있는 한 적게 하려고 할 때, 향나무를 최소한 몇 그루를 준비해야 하는지 고르면?

- ① 6 그루 ② 18 그루 ③ 24 그루
④ 38 그루 ⑤ 41 그루

해설

66, 84, 78 의 최대공약수는 6 이므로

나무의 수는

$$(66 \div 6) + (84 \div 6) + (78 \div 6) = 11 + 14 + 13 \\ = 38 \text{ (그루)}$$

18. 어떤 자연수로 63 을 나누면 3 이 남고 41 을 나누면 5 가 남는다고 한다. 이런 자연수 중 가장 큰 수는?

- ① 6 ② 8 ③ 12 ④ 15 ⑤ 30

해설

$63 - 3 = 60$, $41 - 5 = 36$ 이므로
구하는 가장 큰 수는 60 과 36 의 최대공약수 12 이다.

19. 가로, 세로의 길이가 각각 12 cm, 20 cm 인 직사각형 모양의 카드를 늘어 놓아 가장 작은 정사각형을 만들려고 한다. 이때, 카드는 총 몇 장이 필요한가?

① 10 장 ② 12 장 ③ 13 장 ④ 15 장 ⑤ 17 장

해설

정사각형의 한 변의 길이는 12 와 20 의 최소공배수인 60 cm 이다. 가로는 $60 \div 12 = 5$ (장), 세로는 $60 \div 20 = 3$ (장)이 필요하므로 필요한 카드의 수는 $5 \times 3 = 15$ (장)이다.

20. 자연수 A 와 20 의 최대공약수가 4 이고, 최소공배수가 80 일 때, 자연수 A 는?

- ① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

해설

$$A \times 20 = 4 \times 80 \text{ 이므로}$$

$$\therefore A = 4 \times 4 = 16$$

21. 두 분수 $\frac{7}{26}$, $1\frac{17}{39}$ 의 어느 것에 곱하여도 그 결과가 자연수가 될 때, 곱하는 분수 중 가장 작은 분수를 $\frac{a}{b}$ 라 할 때, $a-b$ 의 값은?

- ① 33 ② 40 ③ 51 ④ 65 ⑤ 71

해설

$$\begin{aligned} \frac{7}{26}, 1\frac{17}{39} &= \frac{56}{39} \text{ 이므로} \\ \frac{a}{b} &= \frac{(26 \text{과 } 39 \text{의 최소공배수})}{(7 \text{과 } 56 \text{의 최대공약수})} = \frac{78}{7} \\ \therefore a-b &= 78-7=71 \end{aligned}$$

22. 자연수 x, y 에 대하여 $\frac{2^2 \times 5}{x} = y^2$ 을 만족하는 x 의 값을 모두 구하면?

① 1, 4

② 4, 5

③ 5, 20

④ 4, 5, 20

⑤ 1, 2, 4, 5, 20

해설

$\frac{2^2 \times 5}{x} = y^2$ 을 만족하는 자연수 x 는 5×2^2 이다.

23. 45에 어떤 자연수를 곱하여 어떤 수의 제곱이 되게 하려고 한다. 곱해야 할 가장 작은 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$45 = 3^2 \times 5$$

따라서 제곱이 되려면 5를 곱해야 한다.

24. 두 수 $2 \times 3 \times 5^m$, $2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$ 의 최소공배수가 $2^a \times 3^b \times 5^2 \times 7^c$ 일 때, \square 안에 알맞은 숫자들의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$2 \times 3 \times 5^m$, $2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$ 의 최소공배수를 구하면 $2 \times 3^2 \times 5^m \times 7^2$ 이다.

또, $2 \times 3 \times 5^m$, $2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$ 의 최소공배수가 $2^a \times 3^b \times 5^2 \times 7^c$ 이므로 위에서 구한 최소공배수와 비교해 보면 $2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2$ 이다.

따라서 \square 안에 들어가는 수는 차례대로 2, 1, 2, 2 이고, 구하는 값은 8 이다.

26. 어떤 수를 5, 8, 10으로 나누었더니 나머지가 각각 2, 5, 7이었다. 어떤 수가 두 자리의 자연수일 때, 어떤 수가 될 수 있는 수들의 합을 구하여라.

- ① 110 ② 111 ③ 112 ④ 113 ⑤ 114

해설

어떤 수를 x 라 하면 $x+3$ 은 5, 8, 10의 공배수이고, 세 수의 최소공배수는 40이다.
따라서 $x+3$ 은 40의 배수 중 두 자리의 자연수이므로 $x+3=40$, $x+3=80$ 이다.
 $x=37, 77$ 이다. 따라서 $37+77=114$ 이다.

28. 자연수 x 에 대하여 $f(x)$ 는 x 를 8 로 나눈 나머지, $g(x)$ 는 x 를 9 로 나눈 나머지라고 정의할 때, $\{f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(100)\} + \{g(1)+g(2)+g(3)+\dots+g(n)\} = 671$ 을 만족하는 n 을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 82

해설

$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3, f(4) = 4, f(5) = 5, f(6) = 6, f(7) = 7, f(8) = 0, f(9) = 1, \dots$
 \rightarrow 연속되는 8 개의 수의 나머지의 합은 28 이다.
 $\rightarrow f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(100) = 28 \times 12 + 1+2+3+4 = 346$

$g(1) = 1, g(2) = 2, g(3) = 3, g(4) = 4, g(5) = 5, g(6) = 6, g(7) = 7, g(8) = 8, g(9) = 0, g(10) = 1, \dots$
 \rightarrow 연속되는 9 개의 수의 합은 36 이다.
 $\rightarrow \{f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(100)\} + \{g(1)+g(2)+g(3)+\dots+g(n)\} = 671$
 $\rightarrow 346 + g(1)+g(2)+g(3)+\dots+g(n) = 671$
 $\rightarrow g(1)+g(2)+g(3)+\dots+g(n) = 325 = 36 \times 9 + 1$
 \rightarrow 연속되는 9 개의 수가 9 짝 있고 뒤에 1 개의 수가 더 있다.
 $\therefore n = 9 \times 9 + 1 = 82$

29. $1231^n + 1232^n + 1233^n + 1234^n$ 의 값이 10의 배수일 때, 두 자리 자연수 n 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 99

해설

10의 배수가 되려면 1의 자리의 숫자가 0이 되어야 한다.

$$1^n + 2^n + 3^n + 4^n = 10k \text{ 에}$$

$n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ 을 대입하면

$$1^n \rightarrow 1, 1, 1, 1, 1, \dots,$$

$$2^n \rightarrow 2, 4, 8, 6, 2, \dots,$$

$$3^n \rightarrow 3, 9, 7, 1, 3, \dots,$$

$$4^n \rightarrow 4, 6, 4, 6, 4 \dots$$

1^n 은 항상 1이고, 2^n , 3^n 은 4번마다, 4^n 은 2번마다 같은 일의

자리의 숫자를 가진다.

n 이 4의 배수가 아닐 때 $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ 은 10의 배수가 되므로

두 자리 자연수 n 의 최댓값은 99이다.

30. 어떤 학교에 남자 260 명, 여자 273 명의 신입생이 들어왔다고 한다. 반별 인원수가 같고 각 반에 속한 남녀의 비가 같도록 반을 나누려고 할 때, 최대 몇 반까지 나오는가?

- ① 14반 ② 13반 ③ 12반 ④ 11반 ⑤ 10반

해설

잘 수 있는 반의 수를 x 라 할 때,
 $260 = x \times \square$, $273 = x \times \Delta$
 x 는 260 과 273 의 최대공약수
 $260 = 2^2 \times 5 \times 13$, $273 = 3 \times 7 \times 13$
 $\therefore x = 13$