

1. 다음 보기의 복소수 중 실수인 것의 개수는?

보기

$2i$, $1 + \sqrt{-4}$, $3 + 4i$, 9 , $i^2 + 1$

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$a + bi$ 에서 $b = 0$ 인 경우, 즉 허수 부분이 0이면 실수이다.
 $2i$ 의 허수 부분은 2, $1 + \sqrt{-4} = 1 + 2i$ 에서 허수 부분은 2이고,
 $3 + 4i$ 의 허수 부분은 4이다.
 9 와 $i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$ 의 허수 부분은 0이다.
따라서 실수인 것은 9와 $i^2 + 1$ 로 두 개다.

2. 복소수 $\frac{3+i}{1+i} + \frac{a-i}{1-i}$ 가 실수가 되도록 하는 실수 a 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}\frac{3+i}{1+i} + \frac{a-i}{1-i} &= \frac{(3+i)(1-i) + (1+i)(a-i)}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{4-2i + (a+1) + (a-1)i}{2} \\ &= \frac{a+5 + (a-3)i}{2}\end{aligned}$$

위의 식이 실수가 되려면 허수 부분이 0이어야 하므로 $a-3=0$

$\therefore a=3$

3. 등식 $(x-2) + (2y+3)i = -7i$ 를 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$$x-2=0, 2y+3=-7$$

$$\therefore x=2, y=-5$$

4. $\frac{1}{\sqrt{-8}}(3\sqrt{-2}-3\sqrt{-8}+\sqrt{-32})$ 을 계산하면?

- ① i ② $\frac{1}{2}$ ③ $-i$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{i}{2}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \frac{1}{2\sqrt{2}i} (3\sqrt{2}i - 6\sqrt{2}i + 4\sqrt{2}i) \\&= \frac{1}{2\sqrt{2}i} \times \sqrt{2}i \\&= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

5. $i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5$ 을 간단히 하면?(단, $i = \sqrt{-1}$)

- ① i ② $-i$ ③ $1+i$ ④ 0 ⑤ 1

해설

$$\begin{aligned} i^2 &= -1, \quad i^3 = i^2 \times i = -i, \quad i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1, \\ i^5 &= i^4 \times i = i \\ i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 \\ &= i + (-1) + (-i) + 1 + i = i \end{aligned}$$

6. 복소수 $z = a + bi$ 일 때, z 의 켤레 복소수 $\bar{z} = a - bi$ 로 나타낸다. 다음 중 옳지 않은 것은? (단, a, b 는 실수)

① $\overline{2+i} = 2-i$

② $\overline{-2-\sqrt{3}i} = -2+\sqrt{3}i$

③ $\overline{i-1} = i+1$

④ $\overline{0} = 0$

⑤ $\overline{-2} = -2$

해설

켤레복소수는 허수부분의 부호를 바꾼다.

③ $i-1$ 의 허수부분은 i 이므로 $\overline{i-1} = -i-1$ 이다.

실수의 켤레복소수는 자기 자신이므로 ④, ⑤는 옳다.

7. 실수 x 에 대하여 복소수 $(1+i)x^2 - (1+3i)x - (2-2i)$ 가 순허수가 되도록 하는 x 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(1+i)x^2 - (1+3i)x - (2-2i)$
 $= (x^2 - x - 2) + (x^2 - 3x + 2)i$
순허수가 되려면 (실수 부분)=0, (허수 부분) $\neq 0$ 이어야 하므로
 $x^2 - x - 2 = 0$, $x^2 - 3x + 2 \neq 0$
(i) $x^2 - x - 2 = 0$ 에서 $(x+1)(x-2) = 0$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = 2$
(ii) $x^2 - 3x + 2 \neq 0$ 에서 $(x-1)(x-2) \neq 0$
 $\therefore x \neq 1$ 또는 $x \neq 2$
따라서 (i), (ii)에 의하여 $x = -1$

8. $(1+i)x^2 + 2(1+2i)x - 3 + 3i$ 가 순허수일 때, x 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ -3 ④ 1, 3 ⑤ -1

해설

$$\begin{aligned} & (1+i)x^2 + 2(1+2i)x - 3 + 3i \\ &= x^2 + x^2i + 2x + 4xi - 3 + 3i \\ &= (x^2 + 2x - 3) + (x^2 + 4x + 3)i \end{aligned}$$

순허수를 만족하려면 실수부=0, 허수부 $\neq 0$ 이어야 한다.
 $x^2 + 2x - 3 = 0$ 이면서, $x^2 + 4x + 3 \neq 0$ 인 x 값을 찾아야 한다.
 $\therefore x = 1$

9. $(1+i)x^2 + (1-i)x - 6 - 2i$ 가 순허수가 되는 실수 x 의 값을 구하면?

- ① -3 ② -2 ③ -1 ④ 2 ⑤ 3

해설

주어진 식을 정리하면 $(x^2 + x - 6) + (x^2 - x - 2)i$ 이고
순허수가 되기 위해선 $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2) = 0$ 이어야
하므로 $x = -3$ 또는 $x = 2$ 이다.
그런데 $x^2 - x - 2 \neq 0$ 이어야 하므로 $x \neq 2$
따라서 $x = -3$

10. x, y 가 실수일 때, $(1+i)x + (1-i)y = \frac{2-i}{1+i}$ 을 만족하는 x, y 의 값은?

- ① $x = -\frac{1}{2}, y = 1$ ② $x = \frac{1}{2}, y = 1$ ③ $x = 1, y = -\frac{1}{2}$
④ $x = 1, y = 1$ ⑤ $x = 1, y = \frac{1}{2}$

해설

$$(x+y) + (x-y)i = \frac{2-i}{1+i} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$$

$$\Rightarrow x+y = \frac{1}{2}, \quad x-y = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}, \quad y = 1$$

11. $\frac{5}{1+2i} = x+yi$ 를 만족하는 실수 x, y 의 합을 구하여라.(단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $x+y = -1$

해설

$$\frac{5}{1+2i} = \frac{5(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{5(1-2i)}{5} = 1-2i$$

$$1-2i = x+yi$$

$$x = 1, y = -2, x+y = -1$$

12. 복소수 z 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

보기

- ㉠ $z \cdot \bar{z}$ 는 실수이다.
- ㉡ $z + \bar{z}$ 는 실수이다.
- ㉢ $z - \bar{z}$ 는 허수이다.
- ㉤ $(z+1)(\bar{z}+1)$ 은 실수이다.

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉤

③ ㉡, ㉤

④ ㉠, ㉡, ㉤

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

해설

$z = a + bi$ (a, b 는 실수)로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$ 이므로

㉠ $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ (실수)

㉡ $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$ (실수)

㉢ $z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi$

$b = 0$ 이면 실수, $b \neq 0$ 이면 허수이다.

㉤ $(z+1)(\bar{z}+1) = (a+bi+1)(a-bi+1)$
 $= (a+1+bi)(a+1-bi)$
 $= (a+1)^2 + b^2$ (실수)

13. 복소수 z 의 켤레복소수 $\bar{z}$ 라 할 때 $(1+2i)z+3(2-\bar{z})=0$ 을 만족하는 복소수 z 를 구하면?

① $z=2-3i$

② $z=4-3i$

③ $z=6-3i$

④ $z=2+3i$

⑤ $z=4+3i$

해설

$z=a+bi, \bar{z}=a-bi$ 라 하면

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (1+2i)(a+bi) + 3(2-a+bi) \\ &= (6-2a-2b) + (2a+4b)i\end{aligned}$$

$$\therefore 6-2a-2b=0, 2a+4b=0$$

$$\therefore a=6, b=-3$$

$$\therefore z=6-3i$$

14. $x = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $x^2 - x + 1$ 의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

⑤ $\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$

해설

$x = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ 의 양변에 2 를 곱하면 $2x = 1 - \sqrt{3}i$

그러므로 $2x - 1 = -\sqrt{3}i$

이 식의 양변을 제곱하면 $4x^2 - 4x + 1 = -3$

즉, $4x^2 - 4x + 4 = 0$

따라서, $x^2 - x + 1 = 0$

15. $x = -2 - i$ 일 때, $x^2 + 4x + 10$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x = -2 - i$ 에서 $x + 2 = -i$ 의 양변을 제곱하면

$(x + 2)^2 = (-i)^2$ 이므로

$x^2 + 4x = -5$

$\therefore x^2 + 4x + 10 = -5 + 10 = 5$

16. 다음이 성립하도록 하는 실수 x 의 값의 범위는?

$$\sqrt{-x^2+5x-6} = -\sqrt{x-3}\sqrt{2-x}$$

- ① $x \geq 2$

② $x \leq 3$

③ $x \leq 2$
- ④ $x \geq 3$

⑤ $2 \leq x \leq 3$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{-x^2+5x-6} &= -\sqrt{(x-3)(2-x)} \\ &= -\sqrt{x-3}\sqrt{2-x}\text{이려면}\end{aligned}$$

$(x-3)(2-x)$ 에서

$$\textcircled{1} \ x-3 \leq 0, \ x \leq 3$$

$$\textcircled{2} \ 2-x \leq 0, \ x \geq 2$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 동시에 만족시켜야 하므로

$$\therefore 2 \leq x \leq 3$$

17. $z = (1+i)x^2 + (2-i)x - 8 - 2i$ 에 대하여 $z^2 < 0$ 을 만족하는 실수 x 의 값을 구하면?(단, $i = \sqrt{-1}$)

① -4 ② -2 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

해설

$$\begin{aligned} z &= (x^2 + 2x - 8) + (x^2 - x - 2)i \\ &= (x-2)(x+4) + (x+1)(x-2)i \end{aligned}$$

그런데, $z^2 < 0$ 에서 z 는 순허수이므로
 $\therefore x = -4$

18. 복소수 $a^2(1+i) + a(3+2i) + 2$ 를 제곱하면 음의 실수가 된다. 이 때, 실수 a 의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

(준식) $= (a^2 + 3a + 2) + (a^2 + 2a)i \Rightarrow$ 순허수
즉, $a^2 + 3a + 2 = 0$
 $a^2 + 2a \neq 0$ 이므로 $\therefore a = -1$

19. $f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{101}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) - f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$ 의 값을 구하면?

① $-i$

② $-2i$

③ $-3i$

④ i

⑤ $2i$

해설

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i^2+2i}{1-i^2} = i$$

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{1+i^2-2i}{1-i^2} = -i$$

$$f(i) - f(-i) = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{101} - \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{101}$$

$$= (-i)^{101} - (i)^{101}$$

$$= -2i^{101}$$

$$= -2i(\because i^4 = 1)$$

20. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^7 + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$ 을 간단히 하면?

① 0

② $1-i$

③ $1+i$

④ $-2i$

⑤ $2i$

해설

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{2i}{2} = i, \frac{1-i}{1+i} = \frac{1}{i} = -i$$

$$\therefore (\text{준식}) = (i)^7 + (-i)^8 = -i + 1$$

21. $a = 1 + i$, $b = 1 - i$ 일 때, $\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \frac{1}{ab} + \left(\frac{1}{b}\right)^2$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$

② $-\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{1}{2}$

⑤ $\frac{1}{4}$

해설

$$a^2 = (1 + i)^2 = 2i, \quad b^2 = (1 - i)^2 = -2i,$$

$$ab = (1 + i)(1 - i) = 2$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a}\right)^2 + \frac{1}{ab} + \left(\frac{1}{b}\right)^2 &= \frac{b^2 + ab + a^2}{a^2b^2} \\ &= \frac{-2i + 2 + 2i}{4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

22. 복소수 $z = a + bi$ (단, a, b 는 실수)와 그 켤레복소수 $\bar{z}$ 에 대하여 $z + \bar{z} = 4$, $z\bar{z} = 5$ 일 때, $a^2 - b^2$ 의 값은?

① -3

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 3

해설

$$z + \bar{z} = 2a = 4, \quad a = 2$$

$$z\bar{z} = a^2 + b^2 = 5, \quad b^2 = 1$$

$$\therefore a^2 - b^2 = 4 - 1 = 3$$

23. 복소수 z 의 켈레복소수가 $\bar{z}$ 일 때, 등식 $(1-i)\bar{z} + 2iz = 3-i$ 를 만족시키는 z 를 구하면?

- ① $z = -1 - 2i$
- ② $z = -2 - 2i$
- ③ $z = -3 - 2i$
- ④ $z = -3 - 3i$
- ⑤ $z = -3 - 4i$

해설

복소수 $z = x + yi$ (x, y 는 실수), $\bar{z} = x - yi$ 라 놓으면
(준식) $= (1-i)(x-yi) + 2i(x+yi) = 3-i$
 $x-yi-xi-y+2xi-2y = 3-i$
 $(x-3y) + (x-y)i = 3-i$
복소수의 상등에 의하여
 $x-3y = 3, x-y = -1$
 $x = -3, y = -2$
 $\therefore z = -3-2i$

24. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a-2}} = -\sqrt{\frac{a}{a-2}}$ 를 만족하는 실수 a 에 대하여 $|a-2|+|a|$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \quad (a < 0, b \geq 0)$$

$$\therefore a \geq 0, \quad a-2 < 0 \Rightarrow 0 \leq a < 2$$

$$\therefore |a-2| + |a| = -(a-2) + a = 2$$

25. 복소수 $z = a + bi$ (단, a, b 는 실수, $i = \sqrt{-1}$ 를 좌표평면 위의 점 $P(a, b)$ 에 대응시킬 때, $(2 - 3i)z$ 가 실수가 되게 하는 점 P 가 그리는 도형은?
- ① 원

② 아래로 볼록한 포물선

③ 위로 볼록한 포물선

④ 기울기가 음인 직선

⑤ 기울기가 양인 직선

해설

$$\begin{aligned}(2 - 3i)z &= (2 - 3i)(a + bi) \\ &= (2a + 3b) + (2b - 3a)i\end{aligned}$$

$\therefore 2b - 3a = 0 \quad \therefore b = \frac{3}{2}a \Rightarrow$ 기울기가 양인 직선

26. 복소수들 사이의 연산 $*$ 가 다음과 같다고 하자.

$$\alpha * \beta = \alpha + \beta + \alpha\beta i$$

이 때, $(1 + 2i) * z = 1$ 을 만족시키는 복소수 z 는?(단, $i = \sqrt{-1}$)

① $1 + i$

② $1 - i$

③ $-1 + i$

④ $-1 - i$

⑤ i

해설

$z = a + bi$ 라 하면

$$(1 + 2i) * z$$

$$= (1 + 2i) + (a + bi) + (1 + 2i)(a + bi)i$$

$$= (-a - b + 1) + (a - b + 2)i = 1$$

$$-a - b + 1 = 1, \quad a - b + 2 = 0$$

$$a = -1, \quad b = 1$$

$$\therefore z = -1 + i$$

27. 복소수 z 에 대하여 다음의 보기 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $z \neq 0$ 이며, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수임)

- ☐㉠ $z\bar{z}$ 는 항상 실수이다.

☐㉡ $z + \bar{z} = 0$ 이면, z 는 순허수이다.

☐㉢ $z + \bar{z}$ 는 항상 실수이다.

☐㉣ $z - \bar{z}$ 는 항상 순허수이다.

☐㉤ $\frac{1}{z}$ 과 $\frac{1}{\bar{z}}$ 의 실수부는 항상 동일하다.

- ① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉣

③ ㉠, ㉡, ㉣

④ ㉠, ㉣, ㉤

⑤ ㉠, ㉡, ㉣, ㉤

해설

$z = a + bi, \bar{z} = a - bi$
㉠ $z\bar{z} = a^2 + b^2 \Rightarrow$ 실수
㉡ $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 0, a = 0$
 $\therefore z = bi \Rightarrow$ 순허수 ($\because z \neq 0$ 이므로 $b \neq 0$)
㉢ $z + \bar{z} = 2a \Rightarrow$ 실수
㉣ $z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi$
순허수로 판단하기 쉬우나, $b = 0$ 인 경우
 $z - \bar{z} = 0$ 으로 순허수가 아니다.
㉤ $\frac{1}{z} = c + di$ 라면 $\frac{1}{\bar{z}} = \overline{\frac{1}{z}} = c - di$ 이므로 참

28. 복소수 $z = a + bi$ 가 다음 두 조건을 만족한다.

$(1 + i + z)^2 < 0 \qquad z^2 = c + 4i$

이 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$(1 + i + z)^2 < 0$ 에서 $1 + i + z$ 는 순허수이다.
 $z = a + bi$ 라면
 $1 + i + z = 1 + i + a + bi = (1 + a) + (1 + b)i$
이것이 순허수이므로 $1 + a = 0, a = -1$
 $\therefore z = -1 + bi$
또한 $z^2 = c + 4i$ 에서 $(-1 + bi)^2 = c + 4i$
 $1 - 2bi - b^2 = c + 4i$
 $\therefore -2b = 4, 1 - b^2 = c$
 $\therefore b = -2, c = -3$
 $\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 14$

29. 복소수 $z = \frac{2}{1+i}$ 에 대하여 $z^3 - 2z^2 + 2z + 5$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} z &= \frac{2}{1+i} = 1-i \\ z^2 &= -2i, \quad z^3 = -2-2i \\ \therefore z^3 - 2z^2 + 2z + 5 \\ &= (-2i-2) - 2(-2i) + 2(1-i) + 5 \\ &= 5 \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned} z = 1-i &\Rightarrow z-1 = -i \\ &\Rightarrow z^2 - 2z + 1 = -1 \\ &\Rightarrow z^2 - 2z + 2 = 0 \\ z^3 - 2z^2 + 2z + 5 &= z(z^2 - 2z + 2) + 5 = 5 \end{aligned}$$

30. $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\frac{y}{x}}$ 가 성립할 때,
 $\sqrt{(y-x+1)^2+3} \sqrt{x^3-y^3-3xy(x-y)}+|x|$ 를 간단히 하면?
- ① $x-1$ ② $-x+1$ ③ $2y-3x+1$
④ $3x-2y-1$ ⑤ $-3x-2y-1$

해설

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\frac{y}{x}} \text{ 일 때, } y \geq 0, x < 0$$
$$\begin{aligned} \text{(준식)} \quad &= |y-x+1| + \sqrt[3]{(x-y)^3} + |x| \\ &= y-x+1+x-y-x = -x+1 \end{aligned}$$