1. 다음 보기의 복소수 중 실수인 것의 개수는?

보기

$2i$, $1+\sqrt{-4}$, $3+4i$, 9, i^2+1

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$a+bi$ 에서 $b=0$ 인 경우, 즉 허수 부분이 0 이면 실수이다.
$2i$ 의 허수 부분은 2, $1+\sqrt{-4}=1+2i$ 에서 허수 부분은 2 이고,
$3+4i$ 의 허수 부분은 4 이다.
9 와 $i^2+1=-1+1=0$ 의 허수 부분은 0 이다.
따라서 실수인 것은 9 와 i^2+1 로 두 개다.

2. 복소수 $\frac{3+i}{1+i}+\frac{a-i}{1-i}$ 가 실수가 되도록 하는 실수 a 의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}\frac{3+i}{1+i}+\frac{a-i}{1-i}&=\frac{(3+i)(1-i)+(1+i)(a-i)}{(1+i)(1-i)}\\&=\frac{4-2i+(a+1)+(a-1)i}{2}\\&=\frac{a+5+(a-3)i}{2}\end{aligned}$$

위의 식이 실수가 되려면 허수 부분이 0이어야 하므로 $a-3=0$

$\therefore\ a=3$

3. 등식 $(x-2)+(2y+3)i=-7i$를 만족하는 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$x-2=0,\ 2y+3=-7$

$\therefore\ x=2,\ y=-5$

4. $\dfrac{1}{\sqrt{-8}}(3\sqrt{-2}-3\sqrt{-8}+\sqrt{-32})$ 을 계산하면?

① i ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $-i$ ④ $-\dfrac{1}{2}$ ⑤ $\dfrac{i}{2}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \frac{1}{2\sqrt{2}i}\left(3\sqrt{2}i-6\sqrt{2}i+4\sqrt{2}i\right)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}i}\times\sqrt{2}i\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

5. $i+i^2+i^3+i^4+i^5$ 을 간단히 하면?(단, $i=\sqrt{-1}$)

① i ② $-i$ ③ $1+i$ ④ 0 ⑤ 1

해설

$i^2=-1,\ i^3=i^2\times i=-i,\ i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1,$

$i^5=i^4\times i=i$

$i+i^2+i^3+i^4+i^5$

$=i+(-1)+(-i)+1+i=i$

6. 복소수 $z=a+bi$일 때, z의 켤레 복소수 $\bar{z}=a-bi$로 나타낸다. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은? (단, a, b는 실수)

① $\overline{2+i}=2-i$

② $\overline{-2-\sqrt{3}i}=-2+\sqrt{3}i$

③ $\overline{i-1}=i+1$

④ $\bar{0}=0$

⑤ $\overline{-2}=-2$

해설

켤레복소수는 허수부분의 부호를 바꾼다.
③ $i-1$의 허수부분은 i이므로 $\overline{i-1}=-i-1$이다.
실수의 켤레복소수는 자기 자신이므로 ④, ⑤는 옳다.

7. 실수 x 에 대하여 복소수 $(1+i)x^2-(1+3i)x-(2-2i)$ 가 순허수가 되도록 하는 x 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(1+i)x^2-(1+3i)x-(2-2i)$

$=(x^2-x-2)+(x^2-3x+2)i$

순허수가 되려면 (실수 부분)=0, (허수 부분)$\neq 0$이어야 하므로

$x^2-x-2=0$, $x^2-3x+2\neq 0$

(i) $x^2-x-2=0$ 에서 $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$

(ii) $x^2-3x+2\neq 0$ 에서 $(x-1)(x-2)\neq 0$

$\therefore\ x\neq 1$ 또는 $x\neq 2$

따라서 (i), (ii) 에 의하여 $x=-1$

8. $(1+i)x^2+2(1+2i)x-3+3i$ 가 순허수일 때, x 의 값은?

① 0 ② 1 ③ -3 ④ 1, 3 ⑤ -1

해설

$(1+i)x^2+2(1+2i)x-3+3i$
$=x^2+x^2i+2x+4xi-3+3i$
$=(x^2+2x-3)+(x^2+4x+3)i$
순허수를 만족하려면 실수부$=0$, 허수부$\neq 0$이어야 한다.
$x^2+2x-3=0$이면서, $x^2+4x+3\neq 0$인 x값을 찾아야 한다.
$\therefore x=1$

9. $(1+i)x^2+(1-i)x-6-2i$ 가 순허수가 되는 실수 x 의 값을 구하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 2 ⑤ 3

해설

주어진 식을 정리하면 $(x^2+x-6)+(x^2-x-2)i$ 이고
순허수가 되기 위해선 $x^2+x-6=(x+3)(x-2)=0$ 이어야 하므로 $x=-3$ 또는 $x=2$ 이다.
그런데 $x^2-x-2\neq 0$ 이어야 하므로 $x\neq 2$
따라서 $x=-3$

10. x, y가 실수일 때, $(1+i)x+(1-i)y=\dfrac{2-i}{1+i}$을 만족하는 x, y의 값은?

① $x=-\dfrac{1}{2}$, $y=1$ ② $x=\dfrac{1}{2}$, $y=1$ ③ $x=1$, $y=-\dfrac{1}{2}$

④ $x=1$, $y=1$ ⑤ $x=1$, $y=\dfrac{1}{2}$

해설

$$(x+y)+(x-y)i=\frac{2-i}{1+i}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$$

$$\Rightarrow \quad x+y=\frac{1}{2}, \quad x-y=-\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x=-\frac{1}{2}, \quad y=1$$

11. $\frac{5}{1+2i} = x + yi$ 를 만족하는 실수 x, y 의 합을 구하여라.(단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $x + y = -1$

해설

$$\frac{5}{1+2i} = \frac{5(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{5(1-2i)}{5} = 1-2i$$

$$1-2i = x + yi$$

$$x = 1, y = -2, x + y = -1$$

12. 복소수 z 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

보기

ㄱ $z \cdot \bar{z}$는 실수이다.

ㄴ $z + \bar{z}$는 실수이다.

ㄷ $z - \bar{z}$는 허수이다.

ㄹ $(z+1)(\bar{z}+1)$은 실수이다.

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄹ ③ ㄴ, ㄷ

④ ㄱ, ㄴ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

해설

$z = a + bi$ (a, b 는 실수)로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$ 이므로

ㄱ $z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$ (실수)

ㄴ $z + \bar{z} = (a+bi) + (a-bi) = 2a$ (실수)

ㄷ $z - \bar{z} = (a+bi) - (a-bi) = 2bi$

$b = 0$ 이면 실수, $b \neq 0$ 이면 허수이다.

ㄹ $(z+1)(\bar{z}+1) = (a+bi+1)(a-bi+1)$

$= (a+1+bi)(a+1-bi)$

$= (a+1)^2 + b^2$ (실수)

13. 복소수 z의 켤레복소수 $\bar{z}$라 할 때 $(1+2i)z+3(2-\bar{z})=0$을 만족하는 복소수 z를 구하면?

① $z=2-3i$ ② $z=4-3i$ ③ $z=6-3i$

④ $z=2+3i$ ⑤ $z=4+3i$

해설

$z=a+bi, \bar{z}=a-bi$라 하면

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (1+2i)(a+bi)+3(2-a+bi) \\ &= (6-2a-2b)+(2a+4b)i\end{aligned}$$

$\therefore 6-2a-2b=0, 2a+4b=0$

$\therefore a=6, b=-3$

$\therefore z=6-3i$

14. $x = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $x^2 - x + 1$ 의 값은?

① -1　　② 0　　③ 1

④ $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$　　⑤ $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

해설

$x = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 의 양변에 2 를 곱하면 $2x = 1 - \sqrt{3}i$

그러므로 $2x - 1 = -\sqrt{3}i$

이 식의 양변을 제곱하면 $4x^2 - 4x + 1 = -3$

즉, $4x^2 - 4x + 4 = 0$

따라서, $x^2 - x + 1 = 0$

15. $x = -2 - i$ 일 때, $x^2 + 4x + 10$ 의 값을 구하시오.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 5

해설

$x = -2 - i$ 에서 $x + 2 = -i$ 의 양변을 제곱하면
$(x + 2)^2 = (-i)^2$ 이므로
$x^2 + 4x = -5$
$\therefore\ x^2 + 4x + 10 = -5 + 10 = 5$

16. 다음이 성립하도록 하는 실수 x 의 값의 범위는?

$$\sqrt{-x^2+5x-6} = -\sqrt{x-3}\,\sqrt{2-x}$$

① $x \geq 2$ ② $x \leq 3$ ③ $x \leq 2$

④ $x \geq 3$ ⑤ $2 \leq x \leq 3$

해설

$\sqrt{-x^2+5x-6} = -\sqrt{(x-3)(2-x)}$

$= -\sqrt{x-3}\,\sqrt{2-x}$이려면

$(x-3)(2-x)$ 에서

㉠ $x-3 \leq 0,\quad x \leq 3$

㉡ $2-x \leq 0,\quad x \geq 2$

㉠, ㉡을 동시에 만족시켜야 하므로

$\therefore\ 2 \leq x \leq 3$

17. $z=(1+i)x^2+(2-i)x-8-2i$에 대하여 $z^2<0$을 만족하는 실수 x의 값을 구하면?(단, $i=\sqrt{-1}$)

① -4 ② -2 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

해설

$z=(x^2+2x-8)+(x^2-x-2)i$
$\quad=(x-2)(x+4)+(x+1)(x-2)i$
그런데, $z^2<0$에서 z는 순허수이므로
$\therefore\ x=-4$

18. 복소수 $a^2(1+i)+a(3+2i)+2$를 제곱하면 음의 실수가 된다. 이 때, 실수 a의 값을 구하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 0　　⑤ 1

해설

$(\text{준식})=\left(a^2+3a+2\right)+\left(a^2+2a\right)i \Rightarrow$ 순허수

즉, $a^2+3a+2=0$

$a^2+2a \neq 0$이므로 $\therefore\ a=-1$

19. $f(x)=\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{101}$ 일 때, $f\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)-f\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)$ 의 값을 구하면?

① $-i$ ② $-2i$ ③ $-3i$ ④ i ⑤ $2i$

해설

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+i^2+2i}{1-i^2}=i$$

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{1+i^2-2i}{1-i^2}=-i$$

$$\begin{aligned} f(i)-f(-i) &= \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{101}-\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{101} \\ &= (-i)^{101}-(i)^{101} \\ &= -2i^{101} \\ &= -2i(\because i^4=1) \end{aligned}$$

20. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^7 + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$ 을 간단히 하면?

① 0 ② $1-i$ ③ $1+i$ ④ $-2i$ ⑤ $2i$

해설

$\frac{1+i}{1-i} = \frac{2i}{2} = i, \ \frac{1-i}{1+i} = \frac{1}{i} = -i$

$\therefore$ (준식) $= (i)^7 + (-i)^8 = -i + 1$

21. $a=1+i$, $b=1-i$ 일 때, $\left(\frac{1}{a}\right)^2+\frac{1}{ab}+\left(\frac{1}{b}\right)^2$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

해설

$a^2=(1+i)^2=2i,\ b^2=(1-i)^2=-2i$,

$ab=(1+i)(1-i)=2$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{a}\right)^2+\frac{1}{ab}+\left(\frac{1}{b}\right)^2 &= \frac{b^2+ab+a^2}{a^2b^2} \\ &= \frac{-2i+2+2i}{4} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

22. 복소수 $z=a+bi$(단, a, b는 실수)와 그 켤레복소수 $\bar{z}$에 대하여 $z+\bar{z}=4,\ z\bar{z}=5$일 때, a^2-b^2의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$z+\bar{z}=2a=4,\ a=2$

$z\bar{z}=a^2+b^2=5\ ,\ b^2=1$

$\therefore\ a^2-b^2=4-1=3$

23. 복소수 z의 켤레복소수가 $\bar{z}$일 때, 등식 $(1-i)\bar{z}+2iz=3-i$를 만족시키는 z를 구하면?

① $z=-1-2i$ ② $z=-2-2i$ ③ $z=-3-2i$

④ $z=-3-3i$ ⑤ $z=-3-4i$

해설

복소수 $z=x+yi(x, y$는 실수$)$, $\bar{z}=x-yi$라 놓으면

(준식) $=(1-i)(x-yi)+2i(x+yi)=3-i$

$x-yi-xi-y+2xi-2y=3-i$

$(x-3y)+(x-y)i=3-i$

복소수의 상등에 의하여

$x-3y=3, x-y=-1$

$x=-3, y=-2$

$\therefore\ z=-3-2i$

24. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a-2}} = -\sqrt{\dfrac{a}{a-2}}$ 를 만족하는 실수 a 에 대하여 $|a-2|+|a|$ 의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \quad (a < 0, b \geq 0)$$

$\therefore a \geq 0,\ a-2 < 0 \Rightarrow 0 \leq a < 2$

$\therefore |a-2|+|a| = -(a-2)+a = 2$

25. 복소수 $z = a + bi$ (단, a, b는 실수, $i = \sqrt{-1}$)를 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대응시킬 때, $(2-3i)z$가 실수가 되게 하는 점 P가 그리는 도형은?

① 원
② 아래로 볼록한 포물선
③ 위로 볼록한 포물선
④ 기울기가 음인 직선
⑤ 기울기가 양인 직선

해설

$$(2-3i)z = (2-3i)(a+bi)$$
$$= (2a+3b) + (2b-3a)i$$

$\therefore\ 2b - 3a = 0 \quad \therefore\ b = \dfrac{3}{2}a \Rightarrow$ 기울기가 양인 직선

26. 복소수들 사이의 연산 $*$가 다음과 같다고 하자.

$\alpha * \beta = \alpha + \beta + \alpha\beta i$

이 때, $(1+2i) * z = 1$을 만족시키는 복소수 z는?(단, $i = \sqrt{-1}$)

① $1+i$ ② $1-i$ ③ $-1+i$

④ $-1-i$ ⑤ i

해설

$z = a + bi$라 하면

$(1+2i) * z$

$= (1+2i) + (a+bi) + (1+2i)(a+bi)i$

$= (-a-b+1) + (a-b+2)i = 1$

$-a-b+1 = 1,\ a-b+2 = 0$

$a = -1,\ b = 1$

$\therefore\ z = -1+i$

27. 복소수 z 에 대하여 다음의 보기 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $z \neq 0$ 이며, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수임)

> ㉠ $z\bar{z}$ 는 항상 실수이다.
>
> ㉡ $z+\bar{z}=0$ 이면, z 는 순허수이다.
>
> ㉢ $z+\bar{z}$ 는 항상 실수이다.
>
> ㉣ $z-\bar{z}$ 는 항상 순허수이다.
>
> ㉤ $\frac{1}{z}$ 과 $\frac{1}{\bar{z}}$ 의 실수부는 항상 동일하다.

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢, ㉣ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

해설

$z=a+bi, \bar{z}=a-bi$

㉠ $z\bar{z}=a^2+b^2 \Rightarrow$ 실수

㉡ $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a=0, a=0$

$\therefore\ z=bi \Rightarrow$순허수 ($\because\ z \neq 0$ 이므로 $b \neq 0$)

㉢ $z+\bar{z}=2a \Rightarrow$ 실수

㉣ $z-\bar{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi$

순허수로 판단하기 쉬우나, $b=0$ 인 경우

$z-\bar{z}=0$ 으로 순허수가 아니다.

㉤ $\frac{1}{z}=c+di$ 라면 $\frac{1}{\bar{z}}=\overline{\frac{1}{z}}=c-di$ 이므로 참

28. 복소수 $z = a + bi$ 가 다음 두 조건을 만족한다.

$(1 + i + z)^2 < 0 \qquad z^2 = c + 4i$

이 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$(1 + i + z)^2 < 0$ 에서 $1 + i + z$ 는 순허수이다.

$z = a + bi$라면

$1 + i + z = 1 + i + a + bi = (1 + a) + (1 + b)i$

이것이 순허수이므로 $1 + a = 0$, $a = -1$

$\therefore \; z = -1 + bi$

또한 $z^2 = c + 4i$ 에서 $(-1 + bi)^2 = c + 4i$

$1 - 2bi - b^2 = c + 4i$

$\therefore \; -2b = 4$, $1 - b^2 = c$

$\therefore \; b = -2, \; c = -3$

$\therefore \; a^2 + b^2 + c^2 = 14$

29. 복소수 $z = \dfrac{2}{1+i}$ 에 대하여 $z^3 - 2z^2 + 2z + 5$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$z = \frac{2}{1+i} = 1 - i$$

$$z^2 = -2i,\ z^3 = -2 - 2i$$

$$\therefore\ z^3 - 2z^2 + 2z + 5$$

$$= (-2i - 2) - 2(-2i) + 2(1 - i) + 5$$

$$= 5$$

해설

$$\begin{aligned} z = 1 - i \quad &\Rightarrow \quad z - 1 = -i \\ &\Rightarrow \quad z^2 - 2z + 1 = -1 \\ &\Rightarrow \quad z^2 - 2z + 2 = 0 \end{aligned}$$

$$z^3 - 2z^2 + 2z + 5 = z(z^2 - 2z + 2) + 5 = 5$$

30. $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\frac{y}{x}}$가 성립할 때,

$\sqrt{(y-x+1)^2} + \sqrt[3]{x^3 - y^3 - 3xy(x-y)} + |x|$를 간단히 하면?

① $x-1$ ② $-x+1$ ③ $2y-3x+1$

④ $3x-2y-1$ ⑤ $-3x-2y-1$

해설

$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\frac{y}{x}}$ 일 때, $y \geq 0,\ x < 0$

$$(\text{준식}) = |y-x+1| + \sqrt[3]{(x-y)^3} + |x|$$

$$= y-x+1+x-y-x = -x+1$$