1. 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y=7 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$ 을 풀면?

① $x=18,\ y=-1$ 또는 $x=2,\ y=3$

② $x=-2,\ y=-3$ 또는 $x=2,\ y=3$

③ $x=\dfrac{18}{5},\ y=-\dfrac{1}{5}$ 또는 $x=2,\ y=3$

④ $x=\dfrac{18}{5},\ y=-\dfrac{1}{5}$ 또는 $x=-2,\ y=-3$

⑤ $x=-\dfrac{18}{5},\ y=-\dfrac{1}{5}$ 또는 $x=-2,\ y=-3$

해설

$$\begin{cases} 2x+y=7\cdots㉠ \\ x^2+Y^2=3\cdots㉡ \end{cases}$$

$y=-2x+7$를 ㉡식에 대입

$x^2+(2x-7)^2=13$

$5x^2-28x+36=(5x-18)(x-2)=0$

$$\begin{cases} x=\dfrac{18}{5},\ y=-\dfrac{1}{5} \\ x=2,\ y=3 \end{cases}$$

2. x가 1, 3, 5, 7, 9이고, 세 부등식 A가 $x > 2$, B가 $x - 5 < 3$, C가 $-x + 1 \geq -2$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① 부등식 B와 C의 공통해는 부등식 A의 해이다.

② 부등식 C의 해는 부등식 A의 해와 부등식 B의 해이다.

③ 부등식 B에서 C를 제외한 수는 부등식 A의 해이다.

④ A, B, C의 공통해는 존재한다.

⑤ B와 C의 공통해는 A의 해와 같다.

해설

A는 3, 5, 7, 9 B는 $x - 5 < 3$, $x < 8$이므로 1, 3, 5, 7 C는 $-x + 1 \geq -2, x \leq 3$ 이므로 1, 3

① B와 C의 공통해는 $1, 3$이므로 B와 C의 공통해는 A의 해가 아니다.

⑤ B와 C의 공통해는 C의 해이다.

3. 다음 연립부등식의 해가 없을 때, a 의 값의 범위를 구하여라.

$$\begin{cases} 3x-8<5x+2 \\ 2x-3 \le x+a \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $a \le -8$

해설

$3x-5x<2+8$

$-2x<10$ 에서

$x>-5$

$2x-x \le a+3$ 에서

$x \le a+3$

$a+3 \le -5$ 이어야 해가 없다.

$\therefore\ a \le -8$

4. 임의의 실수 x에 대하여 $x^2+2ax+2a+3\geq 0$이 성립하기 위한 상수 a의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2+2ax+2a+3\geq 0$이 항상 성립할 조건은

$D/4=a^2-2a-3=(a+1)(a-3)\leq 0$

$\therefore -1\leq a\leq 3$

a의 최솟값은 -1

5. x 에 대한 이차방정식 $x^2-2kx+6-k=0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 -1 보다 작을 때, 정수 k 의 개수를 구하여라.

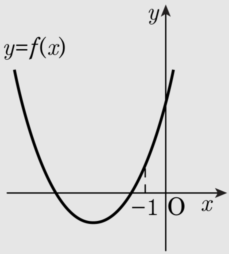
▶ 답 : ＿＿＿＿ 개

▷ 정답 : 3 개

해설

$f(x)=x^2-2kx+6-k$ 라 하면

방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 두 근이 -1 보다 작으므로



(i) $\dfrac{D}{4}=(-k)^2-(6-k)>0$ 에서

$k^2+k-6>0,\ (k+3)(k-2)>0$

$\therefore\ k<-3$ 또는 $k>2$

(ii) $f(-1)=1+2k+6-k>0$ 에서 $k>-7$

(iii) $-\dfrac{-2k}{2}<-1$ 에서 $k<-1$

이상에서 $-7<k<-3$

따라서 정수 k 는 $-6,\ -5,\ -4$ 의 3 개다.

6. 직선 $(5+3k)x+(k-2)y-4k-3=0$은 k의 값에 관계없이 한 정점을 지난다. 그 점의 좌표는?

① $(1,\ 1)$　　② $(1,\ 0)$　　③ $(3,\ 1)$

④ $(-1,\ -3)$　　⑤ $(3,\ 0)$

해설

주어진 직선의 방정식의 좌변을 k에 대하여
정리하면 $(3x+y-4)k+5x-2y-3=0$
이 식이 k에 값에 관계없이 성립하려면
$3x+y-4=0,\ 5x-2y-3=0$
이 두 식을 연립해서 풀면 $x=1,\ y=1$
즉, k의 값에 관계없이 점$(1,\ 1)$을 지난다.

7. 중심이 직선 $y = x + 3$ 위에 있고 점 $(6,\ 2)$를 지나며, x 축에 접하는 원의 반지름 중 가장 작은 것은?

① 2　　② 5　　③ 7　　④ 14　　⑤ 17

해설

원의 중심을 $(a,\ a+3)$ 으로 놓으면 원의 방정식은

$(x-a)^2 + (y-a-3)^2 = (a+3)^2$

이 원이 $(6,\ 2)$를 지나므로

$(6-a)^2 + (a+1)^2 = (a+3)^2$ 에서

$(a-2)(a-14) = 0$

$\therefore a = 2,\ 14$

원의 반지름중 작은 것은 $a + 3 = 2 + 3 = 5$

8. 중심이 x 축 위에 있고 두 점 $(-1,\ 4)$, $(6,\ 3)$ 을 지나는 원의 방정식은?

① $(x-2)^2+y^2=5$ ② $(x+2)^2+y^2=5$

③ $(x-2)^2+y^2=25$ ④ $(x+1)^2+y^2=25$

⑤ $(x+2)^2+y^2=25$

해설

원의 중심의 좌표를 $(a,\ 0)$,
반지름의 길이를 r 라 하면,
원의 방정식은 $(x-a)^2+y^2=r^2 \cdots$ ㉠
이 원이 두 점 $(-1,\ 4)$, $(6,\ 3)$ 을 지나므로,
$x=-1,\ y=4$ 를 ㉠ 에 대입하면,
$(-1-a)^2+4^2=r^2$
$\therefore\ a^2+2a+17=r^2 \cdots$ ㉡
$x=6,\ y=3$ 을 ㉠ 에 대입하면,
$(6-a)^2+3^2=r^2$
$\therefore\ a^2-12a+45=r^2 \cdots$ ㉢
㉡ − ㉢ 을 하면, $14a-28=0,\quad \therefore\ a=2$
$a=2$ 를 ㉡ 에 대입하면, $r^2=25$
따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-2)^2+y^2=25$

9. 이차함수 $y = -x^2 + 4x - 3$ 의 그래프를 평행이동 $f : (x, y) \to (x - a, y - b)$ 에 의하여 옮겼더니 이차함수 $y = -x^2 + 4$ 의 그래프가 되었다. 이때, $a + b$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$y = -(x^2 - 4x + 3) \;\; = -(x^2 - 4x + 4) - 3 + 4$$
$$= -(x - 2)^2 + 1$$

평행이동 f에 의하여

$(y + b) = -(x + a - 2)^2 + 1$

$y = -(x + a - 2)^2 + 1 - b$ 와 $y = -x^2 + 4$가 같으므로,

$a - 2 = 0, \;\; -b + 1 = 4$

$\therefore \;\; a = 2, \; b = -3$

$\therefore \;\; a + b = -1$

해설

$y = -(x - 2)^2 + 1$ 의 꼭지점 $(2, \; 1)$

$y = -x^2 + 4$ 의 꼭지점 $(0, \; 4)$

$f; (x, \; y) \to (x - 2, \; y + 3)$

$\therefore \;\; a = 2, \; b = -3$

$\therefore \;\; a + b = -1$

10. x에 대한 다항식 $f(x)$를 x^2-4x+3으로 나누었을 때의 나머지는 $2x-7$이고, $x^2-3x-10$으로 나누었을 때의 나머지는 11이다. 이 다항식 $f(x)$를 x^2-6x+5로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① $2x+1$ ② $4x+3$ ③ $x-1$

④ $4x-9$ ⑤ $2x-3$

해설

$f(x)$를 x^2-6x+5로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-6x+5)Q(x)+ax+b \\ &= (x-1)(x-5)Q(x)+ax+b \cdots ㉠ \end{aligned}$$

$f(x)$를 x^2-4x+3으로 나눈 몫을 $Q_1(x)$,
$x^2-3x-10$으로 나눈 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-4x+3)Q_1(x)+2x-7 \\ &= (x-1)(x-3)Q_1(x)+2x-7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-3x-10)Q_2(x)+11 \\ &= (x-5)(x+2)Q_2(x)+11 \end{aligned}$$

이므로 $f(1)=-5,\ f(5)=11$이다.
㉠에서
$f(1)=a+b=-5$
$f(5)=5a+b=11$이므로 연립하여 풀면
$a=4,\ b=-9$
따라서 구하는 나머지는 $4x-9$이다.

11. x의 이차방정식 $x^2-3px+4q-2=0$의 두 실근의 비가 $1:2$가 되도록 하는 실수 p, q에 대하여 q의 값의 범위는? (단, $p \neq 0$)

① $q \geq -\frac{1}{3}$　② $q > \frac{1}{2}$　③ $q \geq \frac{1}{2}$
④ $q > -\frac{1}{2}$　⑤ $q \geq \frac{2}{3}$

해설

두 근을 α, 2α라 하면

$\alpha+2\alpha=3p \quad \therefore \ \alpha=p$

$\alpha \cdot 2\alpha=4q-2 \quad \therefore \ \alpha^2=2q-1$

따라서 $p^2=2q-1$

한편 $\mathrm{D}>0$에서 $9p^2-4(4q-2)>0$

$9(2q-1)-16q+8>0$

$2q-1>0$

$\therefore \ q>\frac{1}{2}$

12. 지상 22m 되는 위치에서 초속 30m 로 위로 던져 올린 공의 t 초 후의 높이를 hm 라 하면 $h = -5t^2 + 30t + 22$ 인 관계가 성립한다. 이 공은 몇 초 후에 최고 높이에 도달하는가?

① 1 초 ② 2 초 ③ 3 초 ④ 4 초 ⑤ 5 초

해설

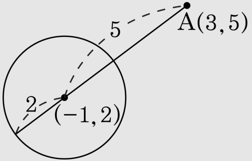
$$h = -5(t^2 - 6t + 9 - 9) + 22$$
$$= -5(t - 3)^2 + 67$$

$t = 3$ 일 때, 최댓값 $h = 67$

13. 점 A(3, 5) 와 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=4$ 위의 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}$ 의 최솟값과 최댓값의 합은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설



원 $(x+1)^2+(y-2)^2=4$ 의 중심이
$(-1,\ 2)$ 이므로
점 A 와 원의 중심 사이의 거리는
$\sqrt{(-1-3)^2+(2-5)^2}=5$
이 때, 원의 반지름의 길이는 2 이므로
($\overline{\mathrm{AP}}$ 의 최댓값)$=5+$ (반지름의 길이)$=5+2=7$
($\overline{\mathrm{AP}}$ 의 최솟값)$=5-$ (반지름의 길이)$=5-2=3$
따라서 구하는 합은 $7+3=10$

14. 직선 $3x+4y=0$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면 원 $x^2+y^2=1$ 에 접한다. 이 때, 두 양수 a , b 에 대하여 $3a+4b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

직선 $3x+4y=0$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼,
y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면
$3(x-a)+4(y-b)=0$ 이므로
원 $x^2+y^2=1$ 과 직선 $3x+4y-3a-4b=0$ 이 접한다.
즉, 원의 중심 $(0,\ 0)$ 에서 직선
$3x+4y-3a-4b=0$ 까지의 거리가
반지름의 길이 1 과 같다.

$$\therefore \frac{|3\times 0+4\times 0-3a-4b|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$$

$\therefore |-3a-4b|=5$
이 때, a , b 가 양수이므로
$3a+4b=5$ 이다.

15. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$을 인수분해 할 때, 다음 중 인수가 아닌 것은?

① $a+b$ ② $b+c$

③ $a+c$ ④ $a^2+ab+bc+ca$

⑤ $a^2+2ab+b^2$

해설

(준 식) $=\{(a+b+c)^3-a^3\}-(b^3+c^3)$

$=(a+b+c-a)\{(a+b+c)^2+(a+b+c)a+a^2\}$

$-(b+c)(b^2-bc+c^2)$

$=(b+c)(3a^2+3ab+3bc+3ca)$

$=3(b+c)(a^2+ab+bc+ca)$

$=3(b+c)\{a(a+b)+c(a+b)\}$

$=3(a+b)(b+c)(c+a)$