1. $y=-3(x-2)(x-4)$ 의 그래프에서 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\begin{aligned} y &= -3(x-2)(x-4) \\ &= -3(x^2-6x+8) \\ &= -3x^2+18x-24 \\ &= -3(x-3)^2+3 \end{aligned}$$

$x=3$ 일 때, 최댓값은 3 이다.

2. 삼차방정식 $(x-1)(x-2)(x-3)=24$의 모든 실근의 합은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$(x-1)(x-2)(x-3)=24$를 전개하면

$x^3-6x^2+11x-30=0$

$x=5$를 대입하면 성립하므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 5 & 1 & -6 & 11 & -30 \\ & & 5 & -5 & 30 \\ \hline & 1 & -1 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$(x-5)(x^2-x+6)=0$

$\therefore\ x=5$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{23}i}{2}$

따라서, 실근은 5뿐이므로 실근의 합은 5이다.

3. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$에서

$x^2 = t$로 놓으면

$t^2 - 13t + 36 = 0,\ (t-4)(t-9) = 0$

$\therefore\ t = 4$ 또는 $t = 9$

(i) $t = 4$일 때, $x^2 = 4$

$\therefore\ x = \pm 2$

(ii) $t = 9$일 때, $x^2 = 9$

$\therefore\ x = \pm 3$

따라서 모든 해의 합은

$(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$

4. 방정식 $x^3 - x^2 + ax - 1 = 0$의 한 근이 -1일 때, 상수 a의 값과 나머지 두 근을 구하면?

① $a = 3, 1 \pm \sqrt{2}$

② $a = -3, 1 \pm \sqrt{2}$

③ $a = 3, 1 \pm \sqrt{3}$

④ $a = -3, 1 \pm \sqrt{3}$

⑤ $a = -1, 1 \pm \sqrt{2}$

해설

$x = -1$이 근이므로 $-1 - 1 - a - 1 = 0$에서 $a = -3$

인수정리와 조립제법을 이용하면

(좌변) $= (x+1)(x^2 - 2x - 1) = 0$

$x^2 - 2x - 1 = 0$의 근은 $1 \pm \sqrt{2}$

$\therefore a = -3$, 나머지 근은 $1 \pm \sqrt{2}$

5. 이차함수 $y = x^2 - 8x + 9$ 의 최댓값 또는 최솟값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -7

해설

$y = x^2 - 8x + 9$

$= (x-4)^2 - 7$

아래로 볼록하므로 $x = 4$ 일 때, 최솟값 -7 을 갖는다.

6. 이차함수 $y = 3x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼
평행이동하였을 때, 이 함수의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$y = 3x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동하면
$y = 3(x-1)^2 - 3$
따라서 $x = 1$ 일 때, 최솟값 -3 을 갖는다.

7. 이차함수 $y = -\frac{1}{3}(x+3)(x-2)$ 의 그래프에서 최댓값은?

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{11}{12}$ ③ $\frac{17}{12}$ ④ $\frac{25}{12}$ ⑤ $\frac{31}{12}$

해설

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{3}(x+3)(x-2) \\ &= -\frac{1}{3}(x^2+x-6) \\ &= -\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{12} \end{aligned}$$

$x = -\frac{1}{2}$ 일 때 최댓값은 $\frac{25}{12}$ 이다.

8. 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + m - 1$ 의 최솟값이 $\frac{1}{2}$ 일 때, m 의 값은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x^2 - 3x + m - 1 \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 9 - 9) + m - 1 \\ &= \frac{1}{2}(x-3)^2 - \frac{9}{2} + m - 1 \\ &= \frac{1}{2}(x-3)^2 + m - \frac{11}{2} \end{aligned}$$

최솟값이 $\frac{1}{2}$ 이므로 $m - \frac{11}{2} = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2} + \frac{11}{2} = \frac{12}{2}$

$\therefore m = 6$

9. 이차함수 $y = -x^2 + bx + c$ 가 직선 $x = -3$ 을 축으로 하고 최댓값 2 를 가질 때, 상수 b, c 의 합 $b - c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $b - c = 1$

해설

꼭짓점의 좌표가 $(-3,\ 2)$ 이므로 이차함수의 식은 $y = -(x+3)^2 + 2$ 이고, 전개하면

$$\begin{aligned} y &= -(x+3)^2 + 2 \\ &= -(x^2 + 6x + 9) + 2 \\ &= -x^2 - 6x - 7 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

$y = -x^2 - 6x - 7$ 이므로 $b = -6, c = -7$ 이다.

$\therefore b - c = -6 - (-7) = 1$

10. 이차함수 $y = \frac{2}{3}x^2$ 의 그래프와 모양이 같고, $x = -1$ 일 때, 최댓값 2 를 갖는 이차함수의 식을 $y = ax^2 + bx + c$ 라고 할 때, $a - b + c$ 의 값을 구하여라. (단, $a,\ b,\ c$ 는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : $a - b + c = 2$

해설

꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ 2)$, x^2 의 계수가 $\frac{2}{3}$ 이므로 이차함수의 식은 $y = \frac{2}{3}(x+1)^2 + 2$ 이다.

$y = \frac{2}{3}(x+1)^2 + 2$ 를 전개하면 $y = \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$ 이므로

$a = \frac{2}{3},\ b = \frac{4}{3},\ c = \frac{8}{3}$ 이다.

$\therefore a - b + c = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = 2$

11. 이차함수 $y = 3x^2 + 6x + a$ 의 최솟값이 7 일 때, a 의 값을 고르면?

① 4　　② 6　　③ 8　　④ 10　　⑤ 12

해설

$y = 3(x+1)^2 - 3 + a$ 이므로

$-3 + a = 7$

$\therefore a = 10$

12. x 에 대한 이차방정식 $x^2+2ax-9+2a^2=0$ 이 실근 $\alpha,\ \beta$ 를 가질 때, $|\alpha-\beta|$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2+2ax-9+2a^2=0$ 에서

근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2a,\ \alpha\beta=-9+2a^2$

$|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-2a)^2-4(-9+2a^2)=-4a^2+36$

그런데 $\dfrac{D}{4}=a^2+9-2a^2\geq 0$

$\therefore\ -3\leq a\leq 3$

$\therefore\ 0\leq|\alpha-\beta|^2\leq 36$

즉, $0\leq|\alpha-\beta|\leq 6$

$\therefore$ (최댓값)+ (최솟값)$=0+6=6$

13. x의 값의 범위가 $x \geq 3$ 인 이차함수 $y = 2x^2 - 8kx$ 의 최솟값이 10 일 때, 상수 k 의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{3}$

해설

$y = 2x^2 - 8kx = 2(x-2k)^2 - 8k^2$ 이
이참함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는
$(2k, -8k^2)$ 이다.

(i) $2k \geq 3$ 일 때, 꼭짓점의 x 좌표가 x의 값의 범위에 속하므로 주어진 이차함수는 $x = 2k$ 일 때 최솟값을 갖는다. 최솟값이 10 이므로 $-8k^2 = 10$, $k^2 = -\frac{5}{4}$ 이 때, 실수 k 의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $2k < 3$ 일 때 꼭짓점의 x 좌표가 x의 값의 범위에 속하지 않으므로 주어진 이차함수는 $x = 3$ 일 때 최솟값을 갖는다. 최솟값이 10 이므로 $18 - 24k = 10$, $24k = 8$

$\therefore k = \frac{1}{3}$

14. x 에 대한 이차함수 $f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3$ 의 최솟값을 $g(a)$ 라 할 때, $g(a)$ 의 최댓값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3$
$= (x-1)^2 - a^2 + 4a + 2$
따라서, $f(x)$ 의 최솟값은 $g(a) = -a^2 + 4a + 2$
$g(a) = -(a-2)^2 + 6$ 에서
$g(a)$ 의 최댓값은 6 이다.

15. $x+y=3, x \geq 0, y \geq 0$ 일 때, $2x^2+y^2$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 하면 $M-m$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$y=3-x \geq 0$

$\therefore\ 0 \leq x \leq 3$

$2x^2+y^2=2x^2+(3-x)^2=3(x-1)^2+6$

$x=1$ 일 때, $m=6$

$x=3$ 일 때, $M=18$

$\therefore\ M-m=12$

16. x, y, z가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$$

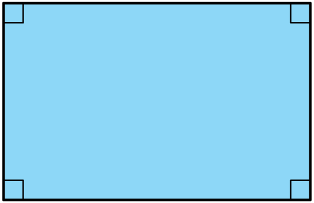
▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$
$= -(x^2 - 4x) - y^2 - z^2 + 5$
$= -(x - 2)^2 - y^2 - z^2 + 9$
$x,\ y,\ z$는 실수이므로
$(x - 2)^2 \geq 0,\ y^2 \geq 0,\ z^2 \geq 0$
따라서 $4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$ 는
$x - 2 = 0,\ y = 0,\ z = 0$ 일 때,
최댓값 9를 갖는다.

17. 직각을 낀 두 변의 길이의 합이 10 인 직사각형의 최대 넓이는?



① $\frac{25}{4}$ ② $\frac{25}{2}$ ③ 25 ④ 50 ⑤ 100

해설

두 변의 길이를 x , $10-x$, 넓이를 y 라 하면

$$
\begin{aligned}
y &= x(10-x) \\
&= -(x^2-10x) \\
&= -(x^2-10x+25-25) \\
&= -(x-5)^2+25
\end{aligned}
$$

$\therefore$ (최대 넓이) $=25$

18. 둘레의 길이가 16cm 인 철사를 구부려서 부채꼴모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 최대가 되도록 하는 부채꼴의 반지름을 a , 이때 부채꼴의 넓이를 b 라 할 때, ab 의 값을 구하면?

① 16 ② 20 ③ 36 ④ 55 ⑤ 64

해설

부채꼴의 반지름을 a, 넓이를 b 라 하면

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2} \times a \times (16 - 2a) = a(8 - a) \\ &= -a^2 + 8a \\ &= -(a^2 - 8a + 16 - 16) \\ &= -(a - 4)^2 + 16 \end{aligned}$$

이 그래프가 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.
꼭짓점은 $(4, 16)$ 이므로 반지름 $a = 4$ 일 때, 부채꼴의 넓이 $b = 16$ 으로 최대가 된다.
따라서 $ab = 64$ 이다.

19. 어떤 축구 선수가 축구공을 찼을 때, t 초 후의 높이를 hm 라고 하면 $h=-\frac{1}{2}t^2+3t$ 의 관계가 성립한다. 축구공이 가장 높이 올라갔을 때의 높이를 구하여라.

▶ 답 : ______ m

▷ 정답 : $\frac{9}{2}$ m

해설

$h=-\frac{1}{2}t^2+3t$ 에서 $h=-\frac{1}{2}(t-3)^2+\frac{9}{2}$ 이다.

따라서 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 $\frac{9}{2}$m 이다.

20. 지면으로부터 30m 높이의 건물 옥상에서 초속 20m 로 똑바로 위로 던져 올린 물체의 x 초 후의 높이를 ym 라고 하면 $y = -5x^2 + 20x + 30$ 의 관계가 성립한다. 이 물체가 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간과 그 때의 높이를 구하여라.

▶ **답 :** ______ 초

▶ **답 :** ______ m

▷ **정답 :** 2 초

▷ **정답 :** 50 m

해설

$y = -5x^2 + 20x + 30$ 에서 $y = -5(x-2)^2 + 50$ 이다.
따라서 $x = 2$ 일 때, y 는 최댓값 50 을 갖는다.

21. 다음 방정식의 해가 <u>아닌</u> 것은?

$$(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12=0$$

① -3　② -2　③ -1　④ 1　⑤ 2

해설

$(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12=0$ 에서 $x^2+x=X$ 라 하면
$X^2-8X+12=0,\ (X-2)(X-6)=0$
$\therefore\ X=2$ 또는 $X=6$
(i) $X=2$ 일 때, $x^2+x=2$ 에서
$x^2+x-2=0,$
$(x-1)(x+2)=0$
$\therefore\ x=1$ 또는 $x=-2$
(ii) $X=6$ 일 때, $x^2+x=6$ 에서
$x^2+x-6=0,$
$(x+3)(x-2)=0$
$\therefore\ x=-3$ 또는 $x=2$
(i), (ii) 에서 주어진 방정식의 해는
$x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$
따라서, 해가 아닌 것은 ③

22. 사차방정식 $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$의 서로 다른 실근은 모두 몇 개인가?

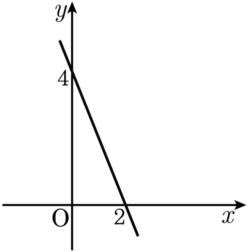
① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow (x+2)(x-2)(x+1)(x-1) = 0$

$\therefore\ x = 2$ 또는 $x = -2$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = -1$

23. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프가 다음과 같을 때, 이차함수 $y = -\frac{1}{4}ax^2 - bx + 4$ 의 최솟값을 구하면?



① 4　　② -4　　③ 8

④ -8　　⑤ 0

해설

기울기 $a = -2$, y 절편 $b = 4$

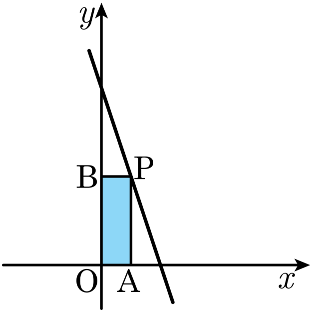
$$y = -\frac{1}{4}ax^2 - bx + 4$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4$$

$$= \frac{1}{2}(x-4)^2 - 4$$

$x = 4$ 일 때, 최솟값은 -4 이다.

24. 다음 그림과 같이 일차함수 $y=-x+4$ 의 그래프 위의 한 점 P 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 A, B 라 할 때, 직사각형 OAPB 의 넓이의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

A 의 좌표를 $(t,\ 0)$ 이라고 하면 P 의 좌표는 $(t,\ -t+4)$ 이고 B 의 좌표는$(0,\ -t+4)$

$\therefore \square\mathrm{OAPB}=t\times(-t+4)=-t^2+4t=-(t-2)^2+4$

$t=2$ 일 때, 넓이의 최댓값 4

25. 사차방정식 $x^4+x^3+2x^2+x+1=0$을 만족하는 모든 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^4+x^3+2x^2+x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+x+2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$

$x+\frac{1}{x}=t$로 치환하면

$t^2+t=0$, $t(t+1)=0$

$\therefore\ t=0$ 또는 $t=-1$

(ⅰ) $x+\frac{1}{x}=0$일 때, $x^2+1=0$

$\therefore x=\pm i$

(ⅱ) $x+\frac{1}{x}=-1$일 때,

$x^2+1=-x$, $x^2+x+1=0$

$\therefore\ x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 방정식의 근은

$x=\pm i$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ (-i)+i+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=-1$