1. 다항식 x^3+ax-8을 x^2+4x+b로 나눌 때, 나머지가 $3x+4$가 되도록 상수 $a+b$의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

x^3+ax-8을 x^2+4x+b로 직접나눈 나머지는
$(a-b+16)x+4b-8$
$(a-b+16)x+4b-8=3x+4 \cdots\cdots$ ㉠
㉠이 x에 대한 항등식이므로,
$a-b+16=3,\ 4b-8=4$
$\therefore\ a=-10,\ b=3$
$\therefore\ a+b=-7$

해설

$x^3+ax-8=(x^2+4x+b)(x+p)+3x+4$의 양변의 계수를 비교하여 $a=-10,\ b=3,\ p=-4$를 구해도 된다.

2. $(x^4 - 8x^2 - 9) \div (x^2 - 9)$ 를 계산하여라.

① $x^2 + 1$ ② $x^2 - 1$ ③ $x^2 + 2$
④ $x^2 - 2$ ⑤ $x^2 + 3$

해설
$x^4 - 8x^2 - 9 = (x^2 - 9)(x^2 + 1)$
$\therefore$ (준식)$= x^2 + 1$

3. 이차방정식 $3x^2 - 6x + k = 0$ 이 실근을 갖도록 실수 k 의 범위를 정하면?

① $k < 1$　② $k \leq 1$　③ $k < 3$
④ $k \leq 3$　⑤ $1 < k < 3$

해설

$3x^2 + 6x + k = 0,$

$\frac{D}{4} = (-3)^2 - 3 \cdot k \geq 0$

$3k \leq 9 \quad \therefore \ k \leq 3$

4. 이차함수 $y = -3x^2 - 6x + k$ 의 최댓값이 $\frac{5}{2}$일 때, 상수 k의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② 0 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$y = -3x^2 - 6x + k = -3(x^2 + 2x + 1) + k + 3 = -3(x+1)^2 + k + 3$ 이므로 꼭짓점의 좌표는 $(-1, k+3)$ 이다.
주어진 함수는 위로 볼록한 함수이므로 꼭짓점의 y 의 값이 최댓값이 된다.
$\therefore\ k + 3 = \frac{5}{2} \quad \therefore\ k = -\frac{1}{2}$

5. 연립부등식 $\begin{cases} 3x+1 \geq \frac{1}{2}x-4 \\ 4x-4 < x+2 \end{cases}$ 를 만족하는 x 의 값 중 가장 작은 정수를 a , 가장 큰 정수를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$3x+1 \geq \frac{1}{2}x-4$ 의 양변에 2를 곱하면

$6x+2 \geq x-8$

$5x \geq -10$

$x \geq -2$

$4x-x < 2+4$

$3x < 6$, $x < 2$

그러므로 $-2 \leq x < 2$

$a+b = (-2)+1 = -1$

6. 부등식 $x-1 \le 3x-7 < 14-x$ 의 해 중에서 정수인 해는 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 3 개

해설

$x-1 \le 3x-7 < 14-x$ 에서

(i) $x-1 \le 3x-7$

$x-3x \le -7+1$

$-2x \le -6$

$\therefore\ x \ge 3$

(ii) $3x-7 < 14-x$

$3x+x < 14+7$

$4x < 21$

$\therefore\ x < \frac{21}{4}$

(i), (ii) 에서 $3 \le x < \frac{21}{4}$ 따라서 정수인 해는 3, 4, 5 로 3 개이다.

7. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $(m+2)x^2-2(m+2)x+4>0$이 항상 성립하도록 할 때, 상수 m의 값의 범위에 속한 정수의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

모든 실수 x에 대하여 성립하기 위해서는
$m \geq -2$
$D/4=(m+2)^2-4(m+2)<0$이므로
$m^2+4m+4-4m-8=m^2-4<0$
따라서 $-2 \leq m < 2$이므로
만족하는 정수 m의 개수는
$-2,\ -1,\ 0,\ 1$의 4개

8. $ax^2 - 2ax + 3 < 0$를 만족하는 x가 없도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a > 0$　② $-1 < a < 3$　③ $0 \le a \le 3$
④ $-1 < a < 4$　⑤ $-1 \le a \le 4$

해설

(i) $a = 0$일 때, 성립한다.
(ii) $a \neq 0$일 때, 함수 $y = ax^2 - 2ax + 3$에서 $D \le 0$이므로
$a^2 - 3a \le 0$
$\therefore 0 < a \le 3 (\because a \neq 0)$

9. 길이가 3 인 선분을 같은 방향으로 $2:1$ 로 내분하는 점과 외분하는 점 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

길이가 3 인 선분을 OA 라 하고,
O 를 원점으로 잡으면 A 는 $\mathrm{A}(3)$
이 선분을 $2:1$ 로 내분하는 점을 $\mathrm{P}(x_1)$ 라 하면

$$x_1 = \frac{2\times3+1\times0}{2+1} = 2$$

$2:1$ 로 외분하는 점 $\mathrm{Q}(x_2)$ 라 하면

$$x_2 = \frac{2\times3-1\times0}{2-1} = 6$$

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}} = 6-2 = 4$

10. 두 점 $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$을 지나고, x축에 접하는 원은 두 개있다. 두 원의 중심 사이의 거리는?

① 4　　② 5　　③ $4\sqrt{2}$　　④ 6　　⑤ $4\sqrt{3}$

해설

그 원을 $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$ 이라 하면
$(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$을 지나므로
$(1-a)^2+(2-b)^2=b^2$, $(2-a)^2+(1-b)^2=b^2$
$1-2a+a^2+4-4b=0\cdots$ ㉠
$4-4a+a^2+1-2b=0\cdots$ ㉡
㉡ $\times 2-$ ㉠
$a^2-6a+5=0$, $(a-1)(a-5)=0$
$\therefore a=1$ 또는 $a=5$
 i) $a=1$ 이면 ① 에서 $b=1$
 ii) $a=5$ 이면 ① 에서 $b=5$
$\therefore$ 두 원의 중심은 $(1,1)$, $(5,5)$ 이다.
중심거리
$=\sqrt{(5-1)^2+(5-1)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

11. 직선 $y = 2x$ 에 대하여 점 $\mathrm{P}(a, b)$ 와 대칭인 점을 Q 라 한다. Q 를 x 축의 양의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 점을 R 라고 하면, R과 P 는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이 된다고 한다. 이 때, $2a - 4b$ 의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

R과 $\mathrm{P}(a, b)$ 는 직선 $y = x$ 에 대하여
대칭이므로 $\mathrm{R}(b, a)$ 이고
Q 는 R 을 x 축으로 -1 만큼 이동한 것이므로
$\mathrm{Q}(b-1, a)$ 이다.
또, P 와 Q 는 $y = 2x$ 에 대하여 대칭이므로
$\left(\frac{a+b-1}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$ 는 $y = 2x$ 위의 점이고 $\overline{\mathrm{PQ}}$와 $y = 2x$는 수직이다. $\therefore$ (선분 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 기울기)$= \frac{b-a}{a-b+1} = -\frac{1}{2} \cdots$① 이고,
$\frac{a+b}{2} = 2\left(\frac{a+b-1}{2}\right) \cdots$②
①에서 $a - b = 1$
②에서 $a + b = 2$
$\therefore\ a = \frac{3}{2},\ b = \frac{1}{2}$, $2a - 4b = 3 - 2 = 1$

12. 이차함수 $y = 2x^2 - 4x + k$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행 이동하였더니 최솟값이 4가 되었다. 이 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$y = 2(x^2 - 2x + 1) + k - 2 = 2(x - 1)^2 + k - 2$

$y = 2(x - 1)^2 + k - 2$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1 만큼 평행 이동한 식은

$y = 2(x - 1)^2 + k - 2 + 1$ 이다.

최솟값이 4 가 되었으므로 $k - 1 = 4$ 이다.

$\therefore k = 5$

13. 연립부등식 $\begin{cases} 3x+7 \leq -x+31 \\ x+a \geq -3 \end{cases}$ 의 해가 다음과 같을 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$\begin{cases} 3x+7 \leq -x+31 \\ x+a \geq -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x \leq 24 \\ x+a \geq -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ x \geq -3-a \end{cases}$

$\therefore \ -3-a \leq x \leq 6$

해가 $-1 \leq x \leq 6$ 이므로 $-3-a=-1$

$\therefore \ a=-2$

14. 연립부등식 $\begin{cases} x+2 \le 2x+3 \\ 3x \ge 5x-14 \end{cases}$ 의 해 x의 최댓값을 a, 최솟값을 b라고 할 때, $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$x+2 \le 2x+3,\ x \ge -1$

$3x \ge 5x-14,\ x \le 7$

→ 연립부등식의 해는 $-1 \le x \le 7$

따라서 x의 최댓값은 7, 최솟값은 -1이다.

$\therefore a-b = 7-(-1) = 8$

15. 연립부등식 $\begin{cases} a+5x<2a \\ 2(x-1)\geq -6 \end{cases}$ 이 해를 갖지 않기 위한 정수 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -10

해설

$a+5x<2a$

$x<\dfrac{a}{5}$

$2(x-1)\geq -6$

$2x-2\geq -6$

$\therefore x\geq -2$

연립부등식이 해를 갖지 않으려면

$\dfrac{a}{5}\leq -2$

$\therefore a\leq -10$

따라서 a 의 최댓값은 -10 이다.

16. 연속하는 세 홀수의 합이 45 보다 크고 55 보다 작을 때, 세 홀수를 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 15

▷ 정답: 17

▷ 정답: 19

해설

연속하는 세 자연수를 $x-2,\ x,\ x+2$ 로 각각 두면

$45 < (x-2)+x+(x+2) < 55$

$45 < 3x < 55$

$\Rightarrow \begin{cases} 45 < 3x \\ 3x < 55 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x > 15 \\ x < \dfrac{55}{3} \end{cases}$

$\therefore\ x = 16, 17, 18$

x 는 홀수이므로 17 이다.

따라서 세 홀수는 15, 17, 19 이다.

17. $1 < x < 3$ 에서 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위가 $\alpha < a < \beta$ 일 때, $3\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

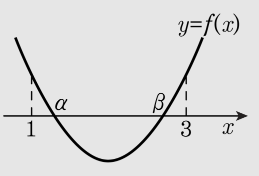
▶ 답:

▷ 정답: 52

해설

$f(x) = x^2 - ax + 4$ 라 하면

$1 < x < 3$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(ⅰ) $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D = a^2 - 16 > 0$ 에서 $(a+4)(a-4) > 0$

$\therefore\ a < -4$ 또는 $a > 4$

(ⅱ) $f(1) = 5 - a > 0$ 에서 $a < 5$

$f(3) = 13 - 3a > 0$ 에서 $a < \frac{13}{3}$

$\therefore\ a < \frac{13}{3}$

(ⅲ) $y = f(x)$ 의 그래프의 대칭축이

$x = \frac{a}{2}$ 이므로 $1 < \frac{a}{2} < 3$

$\therefore\ 2 < a < 6$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ) 에서 a 의 값의 범위는 $4 < a < \frac{13}{3}$

따라서, $\alpha = 4,\ \beta = \frac{13}{3}$ 이므로 $3\alpha\beta = 52$

18. 두 직선 $ax+by+1=0,\ bx+ay+1=0$ 이 서로 평행할 때, 두 직선 사이의 거리를 a 에 대한 식으로 나타내면?

① $\dfrac{\sqrt{1}}{|a|}$ ② $\dfrac{\sqrt{2}}{|a|}$ ③ $\dfrac{\sqrt{3}}{|a|}$ ④ $\dfrac{2}{|a|}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{5}}{|a|}$

해설

두 직선이 평행하면 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{a}\neq\dfrac{1}{1}$

$\therefore\ a=-b\ (\because\ a\neq b)$

직선 $ax+by+1=ax-ay+1=0$ 위의 한 점을

잡으면 $\mathrm{P}\left(0,\ \dfrac{1}{a}\right)$ 이므로 직선

$bx+ay+1=0$ 에서 $-ax+ay+1=0$ 까지의

거리는 $\dfrac{\left|(-a)\cdot 0+a\cdot\dfrac{1}{a}+1\right|}{\sqrt{a^2+a^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{|a|}$

19. 두 직선 $3x+4y=24$ 와 $3x+4y=4$ 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점과 나머지 직선 사이의 거리를 구하면 된다.

$3x+4y=24$ 의 점 $(0,6)$

$\frac{|0\times3+6\times4-4|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4$

20. 모든 실수 k 에 대하여 직선 $(1+k)x+y-2k=0$ 에 대칭이고, 반지름의 길이가 3 인 원의 방정식을 구하면?

① $(x+2)^2+(y-2)^2=9$ ② $(x-2)^2+(y+2)^2=9$
③ $(x-1)^2+(y-2)^2=9$ ④ $(x+1)^2+(y+2)^2=9$
⑤ $(x-1)^2+(y+2)^2=9$

해설

$(1+k)x+y-2k=0$
$x+kx+y-2k=0$ (k 는 임의의 실수)
$x+y+k(x-2)=0$
이 직선은 항상 $(2,\ -2)$ 를 지난다.
따라서 이와 같은 모든 직선에 대칭인 원의 중심은 $(2, -2)$ 이다.
$\therefore (x-2)^2+(y+2)^2=9$

21. 두 원 $x^2+y^2-2ay+8a-25=0$ 와 $x^2+y^2=1$ 이 외접할 때 a 의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

두 원이 외접하면 중심 사이의 거리와 반지름의 합이 일치한다.

$\Rightarrow \quad x^2+(y-a)^2=a^2-8a+25,\quad x^2+y^2=1$

중심사이의 거리 : a

반지름의 합 : $1+\sqrt{a^2-8a+25}$

$\Rightarrow \quad a-1=\sqrt{a^2-8a+25}$

$\Rightarrow \quad a=4$

22. $x^2 + y^2 - 4x = 0,\ x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$ 의 교점을 지나는 원의 반지름의 최솟값은?

① $\sqrt{5}$　② $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　③ $\dfrac{3}{2}$　④ $\sqrt{2}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

해설

주어진 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은
$(x^2 + y^2 - 4x) + k(x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8) = 0$
이 중에서 반지름이 최소인 경우는 공통현을 지름으로 하는 원이다.
결국 구하는 값은 공통현의 길이의 절반을 구하면 된다.
공통현의 방정식은 $x + y - 4 = 0$,
$x^2 + y^2 - 4x = 0$ 의 중심은 $(2,\ 0)$ 반지름은 2 이고,
중심에서 공통현까지의 길이는 $\sqrt{2}$ 이므로
공통현의 길이의 절반은 $\sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$,
구하는 값은 $\sqrt{2}$ 이다.

23. 두 원 $x^2+y^2-x-2y-2=0$, $x^2+y^2-2x-2y-3=0$ 의 교점의 좌표를 구하면?

① $(-1,0)$, $(-1,2)$
② $(-2,1)$, $(0,2)$
③ $(1,2)$, $(4,-2)$
④ $(4,2)$, $(-3,5)$
⑤ $(-6,7)$, $(-8,4)$

해설

공통현의 방정식은
$(x^2+y^2-x-2y-2)-(x^2+y^2-2x-2y-3)=0$ 에서 $x=-1$
공통현의 방정식 $x=-1$ 을
$x^2+y^2-x-2y-2=0$ 에 대입하면
$(-1)^2+y^2-(-1)-2y-2=0$
$y^2-2y=0$
$y(y-2)=0$
$\therefore y=0$ 또는 $y=2$
따라서, 구하는 교점의 좌표는 $(-1,0)$, $(-1,2)$

24. 직선 $2x-y-1=0$ 에 대하여 점 $(3,\ 0)$ 과 대칭인 점의 좌표를 구하면?

① $(1,\ 2)$　② $(-1,\ 2)$　③ $(1,-2)$
④ $(2,-1)$　⑤ $(-2,\ 1)$

해설

구하는 좌표를 (a,b) 로 놓는다.
점 (a,b) 는 점$(3,\ 0)$ 과 직선 $2x-y-1=0$ 에 대하여 대칭이고, 이 때 점 $(3,0)$과 점 (a,b) 를 연결하는 선분에서 $2x-y-1=0$ 와 수직으로 만나므로
중점 M 의 좌표는 $M\left(\frac{a+3}{2},\ \frac{b}{2}\right)$

$2\times\frac{a+3}{2}-\frac{b}{2}-1=0$
$2a+6-b-2=0$
$2a-b+4=0 \quad \cdots\cdots$(가)
기울기는 $\frac{b}{a-3}\times2=-1$ 이므로
$a=-2b+3$
이것을 (가) 에 대입하면
$2(-2b+3)-b+4=0 \qquad \therefore\ a=-1,\ b=2$

25. 어떤 일차식 $g(x)$에 대하여

$x^4+2x^3-3x^2-g(x)=\left\{(x-\alpha)(x-\beta)\right\}^2$가 성립한다. 이 때, $\alpha\beta$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$
\begin{aligned}
(\text{우변}) &= \{(x-\alpha)(x-\beta)\}^2 \\
&= \left\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\right\}^2 \\
&= x^4-2(\alpha+\beta)x^3 \\
&\quad + \left\{(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta\right\}x^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)x+\alpha^2\beta^2 \\
&= x^4+2x^3-3x^2-g(x)
\end{aligned}
$$

$g(x)$가 일차식이므로 양변의 계수를 비교하면

$-2(\alpha+\beta)=2,\ (\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta=-3$

$\therefore\ \alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=-2$

26. 다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지는 5이고, 몫 $Q(x)$를 다시 $x+3$으로 나누면 나머지가 3이다. 이때, $f(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지는?

① 10 ② -10 ③ 9 ④ -9 ⑤ 8

해설

나머지정리에 의해 $f(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지는 $f(-3)$이다.
$f(x)=(x-2)Q(x)+5$에서
$x=-3$을 대입하면 $f(-3)=(-3-2)Q(-3)+5$
$Q(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 3이므로 $Q(-3)=3$
$\therefore\ f(-3)=-10$

27. 다항식 $f(x)$를 $ax+b(a \neq 0)$로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라고 한다. $xf(x)$를 $x+\frac{b}{a}$로 나눈 나머지를 구하면?

① $\frac{bR}{a}$ ② $\frac{b}{Ra}$ ③ $-\frac{b}{a}R$ ④ $\frac{aR}{b}$ ⑤ $-\frac{aR}{b}$

해설

$f(x)=(ax+b)Q(x)+R$

$=a\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R$

$\therefore\ x \cdot f(x)$

$=ax\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+Rx$

$=ax\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R\left(x+\frac{b}{a}\right)-\frac{b}{a}R$

$=\left(x+\frac{b}{a}\right)\{axQ(x)+R\}-\frac{b}{a}R$

따라서, 구하는 몫은 $axQ(x)+R$

나머지는 $-\frac{bR}{a}$

해설

$f(x)=(ax+b)Q(x)+R$에서

나머지 정리에 의해 $f(-\frac{b}{a})=R$

$x \cdot f(x)=\left(x+\frac{b}{a}\right)Q'(x)+R'$이라 하면

나머지 정리에 의해 $-\frac{b}{a}f(-\frac{b}{a})=R'$

$f(-\frac{b}{a})=R$를 대입하면 $R'=-\frac{b}{a}R$

28. $a+b+c=1$을 만족하는 세 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $x=a-2b+3c$ $,y=b-2c+3a,\ z=c-2a+3b$라 할 때, $(x^2+2xy+1)+(y^2+2yz+1)+(z^2+2zx+1)$의 값을 구하면?

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

해설

$a+b+c=1$이므로

$x+y+z=2a+2b+2c=2(a+b+c)=2$

$\therefore\ (x^2+2xy+1)+(y^2+2yz+1)+(z^2+2zx+1)$

$=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx+3$

$=(x+y+z)^2+3$

$=2^2+3=4+3=7$

29. 다음 방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4+5x^3-12x^2+5x+1=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$x=0$을 대입하면
$1=0$이 되어 모순이므로 $x \neq 0$이다.
따라서, 주어진 식의 양변을
x^2으로 나누면

$x^2+5x-12+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-12=0$

$\therefore \left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-14=0$

여기서 $x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2+5X-14=0$, $(X+7)(X-2)=0$

$\therefore X=-7$ 또는 $X=2$

(ⅰ) $X=-7$일 때,

$x+\frac{1}{x}=-7$에서

$x^2+7x+1=0$

$\therefore \frac{-7\pm 3\sqrt{5}}{2}$

(ⅱ) $X=2$일 때,

$x+\frac{1}{x}=2$에서

$x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$

$\therefore x=1$

(ⅰ), (ⅱ)로부터

$x=1$(중근) 또는 $x=\frac{-7\pm 3\sqrt{5}}{2}$

따라서, 모든 근의 합은

$1+\frac{-7+3\sqrt{5}}{2}+\frac{-7-3\sqrt{5}}{2}=-6$이다.

30. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $|x-2|<\sqrt{3}$의 해와 같을 때, 이차부등식 $cx^2+(b+c)x+(a+b+5c)>0$ 의 해를 구하면?

① $0<x<1$　② $1<x<2$　③ $2<x<3$
④ $3<x<4$　⑤ $4<x<5$

해설

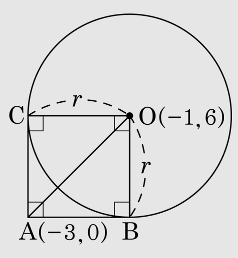
$|x-2|<\sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3}<x-2<\sqrt{3}$
$\Leftrightarrow 2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$
$ax^2+bx+c>0 \Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}<0(\because a<0)$
$-\frac{b}{a}=4, \frac{c}{a}=1 \Rightarrow b=-4a, c=a$
그러면 주어진 식 $cx^2+(b+c)x+(a+b+5c)>0$에서
$ax^2+(-4a+a)x+a-4a+5a>0$
$ax^2-3ax+2a>0$ $(\because a<0)$
$x^2-3x+2<0$
$(x-2)(x-1)<0$
따라서 $1<x<2$

31. 점 A$(-3,\ 0)$에서 원 $(x+1)^2+(y-6)^2=r^2$에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, r의 값은? (단, $r>0$)

① 4　② $3\sqrt{2}$　③ $2\sqrt{5}$　④ $2\sqrt{6}$　⑤ 5

해설

원 $(x+1)^2+(y-6)^2=r^2$은 중심이 O$(-1,\ 6)$이고
반지름의 길이가 $r(r>0)$인 원이다.
점 A에서 이 원에 그은 두 접선이 서로 수직이면 다음 그림과 같이
□ABOC는 한 변의 길이가 r인 정사각형이 된다.



이 때, 두 점 A와 O 사이의 거리가 $r\sqrt{2}$가 되어야 하므로

$$\sqrt{\{-1-(-3)\}^2+(6-0)^2}=r\sqrt{2}$$

$$\sqrt{40}=r\sqrt{2}$$

$$\therefore\ r=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

32. 모든 복소수 z 에 대하여 다음 중 실수인 것을 모두 고르면 ? (단 $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

㉠ $(z+1)^2$
㉡ $(2z+1)(\bar{z}+1)-z$
㉢ $(z^2+z+1)(\bar{z}+1)+\left((\bar{z})^2+\bar{z}+1\right)(z+1)$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢

④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ (반례) $z=i$ 이면 $(z+1)^2=(i+1)^2=2i$
(허수)

㉡ $(2z+1)(\bar{z}+1)-z=2z\bar{z}+(z+\bar{z})+1$ (실수)
($\because$ $z\bar{z}, z+\bar{z}$ 모두 실수이다.)

㉢ $(z^2+z+1)(\bar{z}+1)=Z$ 라 하면
(준식)$=Z+\overline{Z}$ 이므로 실수

따라서 실수인 것은 ㉡, ㉢이다.

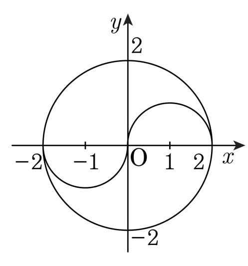
33. 이차방정식 $x^2-(m+1)x-m+2=0$의 두 근이 모두 정수가 되도록 하는 정수 m의 값의 합은?

① -12　② -8　③ 0　④ 8　⑤ 12

해설

두 정수근을 $\alpha,\ \beta$라 하자.
근과 계수 관계에 의해
$\alpha+\beta=m+1\ \ \alpha\beta=-m+2$
$\alpha+\beta-1=2-\alpha\beta$
$(\alpha+1)(\beta+1)=4$
$\therefore\ \ \alpha+1=\pm1\ \ \beta+1=\pm4$
$\alpha+1=\pm4\ \ \beta+1=\pm1$
$\alpha+1=\pm2\ \ \beta+1=\pm2$(복호동순)
$\therefore\ \ (\alpha,\ \beta)=(0,3),\ (-2,-5),\ (3,0),\ (-5,-2),\ (1,1),\ (-3,-3)$
$m=\alpha+\beta-1$이므로 $m=2,\ -8,\ 1,\ -7$
$\therefore\ \ 2+(-8)+1+(-7)=-12$

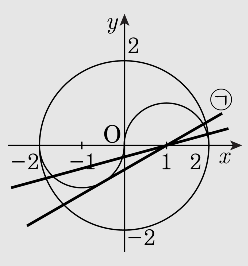
34. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 원과 반원으로 이루어진 태극문양이 있다. 태극문양과 직선 $y=a(x-1)$이 서로 다른 다섯 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값의 범위는?



① $0<a<\frac{\sqrt{2}}{3}$　② $0<a<\frac{\sqrt{3}}{3}$
③ $0<a<\frac{2}{3}$　④ $0<a<\frac{\sqrt{5}}{3}$
⑤ $0<a<\frac{\sqrt{6}}{3}$

해설

직선 $y=a(x-1)$의 그래프는 실수 a의
값에
관계없이 항상 점 $(1,0)$을 지나므로
직선이 태극문양과 서로 다른 다섯 점에서 만나는 경우는 다음 그림과 같이 x축과 직선 ㉠사이를 움직이는 직선일 때이다.



이때, 직선의 기울기는 양수이므로 $a>0$
직선과 제3사분면의 반원이 접하는 경우,
점 $(-1,0)$과 직선 $y=a(x-1)$,
즉 $ax-y-a=0$사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과 같으므로

$\frac{|-a-0-a|}{\sqrt{a^2+1}}=1, |2a|=\sqrt{a^2+1}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$4a^2=a^2+1, a^2=\frac{1}{3}$

$\therefore a=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

그런데 $a>0$이므로 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서, 직선과 태극문양이 서로 다른 다섯 점에서 만나기 위한 실수 a의 값의 범위는

$0<a<\frac{\sqrt{3}}{3}$이다.

35. 두 원 $x^2+y^2=1,\ x^2+(y-2)^2=4$ 의 공통접선의 방정식을 $y=ax+b$ 라고 할 때, a^2+b^2 의 값을 구하면?

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

원의 중심에서 직선 $y=ax+b$ 까지의
거리가 반지름과 같으면 되므로

$\dfrac{|b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=1 \Longleftrightarrow b^2=a^2+1\cdots$①

$\dfrac{|b-2|}{\sqrt{a^2+1}}=2 \Longleftrightarrow (b-2)^2=4(a^2+1)\cdots$②

①, ② 에서 $b^2\geq 1$ 임을 유의하면
$b=-2,\ a^2=3$
따라서 $a^2+b^2=7$

해설

중심 $\mathrm{C}_1(0\ ,0)$ 과 직선 $ax-y+b=0$
사이의 거리는 $\dfrac{|a\cdot 0-1\cdot 0+b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\dfrac{|b|}{\sqrt{a^2+1}}$
반지름의 길이와 같으므로

$\dfrac{|b|}{\sqrt{a^2+1}}=1\ ,\ |b|=\sqrt{a^2+1}$

$\therefore\ b^2=a^2+1\cdots\cdots$①
중심 $\mathrm{C}_2\ (0,2)$ 와 직선 $ax-y+b=0$
사이의 거리는

$\dfrac{|b-2|}{\sqrt{a^2+1=2}}\ ,\ |b-2|=2\sqrt{a^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면
$b^2-4b=4a^2\quad\cdots\cdots$ⓛ
ⓣ $\times 4-$ ⓛ 에서
$3b^2+4b-4=0\ ,\ (3b-2)(b+2)=0$

$\therefore\ b=\dfrac{2}{3},\ -2$

이 때 $b^2=a^2+1\geq 1$ 에서 $b=-2$
이것을 ⓣ에 대입하면 $a^2=3$
$\therefore a^2+b^2=3+4=7$