1. 다항식 x^3+ax-8을 x^2+4x+b로 나눌 때, 나머지가 $3x+4$가 되도록 상수 $a+b$의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

x^3+ax-8을 x^2+4x+b로 직접나눈 나머지는

$(a-b+16)x+4b-8$

$(a-b+16)x+4b-8=3x+4\cdots\cdots$ ㉠

㉠이 x에 대한 항등식이므로,

$a-b+16=3,\ 4b-8=4$

$\therefore\ a=-10,\ b=3$

$\therefore\ a+b=-7$

해설

$x^3+ax-8=(x^2+4x+b)(x+p)+3x+4$의 양변의 계수를 비교하여 $a=-10,\ b=3,\ p=-4$를 구해도 된다.

2. $\left(x^4 - 8x^2 - 9\right) \div \left(x^2 - 9\right)$를 계산하여라.

① $x^2 + 1$ ② $x^2 - 1$ ③ $x^2 + 2$

④ $x^2 - 2$ ⑤ $x^2 + 3$

해설

$x^4 - 8x^2 - 9 = \left(x^2 - 9\right)\left(x^2 + 1\right)$

$\therefore$ (준식)$= x^2 + 1$

3. 이차방정식 $3x^2 - 6x + k = 0$이 실근을 갖도록 실수 k의 범위를 정하면?

① $k < 1$ ② $k \leq 1$ ③ $k < 3$

④ $k \leq 3$ ⑤ $1 < k < 3$

해설

$3x^2 + 6x + k = 0$,

$$\frac{D}{4} = (-3)^2 - 3 \cdot k \geq 0$$

$3k \leq 9 \quad \therefore \; k \leq 3$

4. 이차함수 $y = -3x^2 - 6x + k$ 의 최댓값이 $\frac{5}{2}$ 일 때, 상수 k 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② 0 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$y = -3x^2 - 6x + k = -3(x^2 + 2x + 1) + k + 3 = -3(x+1)^2 + k + 3$
이므로 꼭짓점의 좌표는 $(-1, k+3)$ 이다.
주어진 함수는 위로 볼록한 함수이므로 꼭짓점의 y 의 값이 최댓값이 된다.

$\therefore\ k + 3 = \frac{5}{2} \qquad \therefore\ k = -\frac{1}{2}$

5. 연립부등식 $\begin{cases} 3x+1 \geq \dfrac{1}{2}x-4 \\ 4x-4 < x+2 \end{cases}$ 를 만족하는 x 의 값 중 가장 작은 정수를 a , 가장 큰 정수를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$3x+1 \geq \dfrac{1}{2}x-4$ 의 양변에 2를 곱하면

$6x+2 \geq x-8$

$5x \geq -10$

$x \geq -2$

$4x-x < 2+4$

$3x < 6$, $x < 2$

그러므로 $-2 \leq x < 2$

$a+b = (-2)+1 = -1$

6. 부등식 $x-1 \le 3x-7 < 14-x$ 의 해 중에서 정수인 해는 몇 개인지 구하여라.

▶ **답 :** ______ 개

▷ **정답 :** 3 개

해설

$x-1 \le 3x-7 < 14-x$ 에서

(i) $x-1 \le 3x-7$

$x-3x \le -7+1$

$-2x \le -6$

$\therefore \; x \ge 3$

(ii) $3x-7 < 14-x$

$3x+x < 14+7$

$4x < 21$

$\therefore \; x < \dfrac{21}{4}$

(i), (ii) 에서 $3 \le x < \dfrac{21}{4}$ 따라서 정수인 해는 $3, 4, 5$ 로 3 개이다.

7. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $(m+2)x^2-2(m+2)x+4>0$이 항상 성립하도록 할 때, 상수 m의 값의 범위에 속한 정수의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

모든 실수 x에 대하여 성립하기 위해서는

$m \geq -2$

$D/4=(m+2)^2-4(m+2)<0$이므로

$m^2+4m+4-4m-8=m^2-4<0$

따라서 $-2 \leq m < 2$이므로

만족하는 정수 m의 개수는

$-2,\ -1,\ 0,\ 1$의 4개

8. $ax^2-2ax+3<0$를 만족하는 x가 없도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a>0$ ② $-1<a<3$ ③ $0\le a\le 3$

④ $-1<a<4$ ⑤ $-1\le a\le 4$

해설

(i) $a=0$일 때, 성립한다.

(ii) $a\neq 0$일 때, 함수 $y=ax^2-2ax+3$에서 $D\le 0$이므로

$a^2-3a\le 0$

$\therefore 0<a\le 3(\because a\neq 0)$

9. 길이가 3 인 선분을 같은 방향으로 2 : 1 로 내분하는 점과 외분하는 점 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

길이가 3 인 선분을 OA 라 하고,
O 를 원점으로 잡으면 A 는 A(3)
이 선분을 2 : 1 로 내분하는 점을 $P(x_1)$ 라 하면

$$x_1 = \frac{2 \times 3 + 1 \times 0}{2 + 1} = 2$$

2 : 1 로 외분하는 점 $Q(x_2)$ 라 하면

$$x_2 = \frac{2 \times 3 - 1 \times 0}{2 - 1} = 6$$

따라서 $\overline{PQ} = 6 - 2 = 4$

10. 두 점 $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$을 지나고, x축에 접하는 원은 두 개있다. 두 원의 중심 사이의 거리는?

① 4 ② 5 ③ $4\sqrt{2}$ ④ 6 ⑤ $4\sqrt{3}$

해설

그 원을 $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$ 이라 하면

$(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$을 지나므로

$(1-a)^2+(2-b)^2=b^2$, $(2-a)^2+(1-b)^2=b^2$

$1-2a+a^2+4-4b=0\cdots$ ㉠

$4-4a+a^2+1-2b=0\cdots$ ㉡

㉡ $\times 2-$ ㉠

$a^2-6a+5=0$, $(a-1)(a-5)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=5$

i) $a=1$ 이면 ① 에서 $b=1$

ii) $a=5$ 이면 ① 에서 $b=5$

$\therefore$ 두 원의 중심은 $(1,1)$, $(5,5)$ 이다.

중심거리

$=\sqrt{(5-1)^2+(5-1)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

11. 직선 $y=2x$ 에 대하여 점 $\mathrm{P}(a,b)$ 와 대칭인 점을 Q 라 한다. Q 를 x 축의 양의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 점을 R 라고 하면, R과 P 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이 된다고 한다. 이 때, $2a-4b$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

R과 $\mathrm{P}(a,b)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 $\mathrm{R}(b,a)$ 이고

Q 는 R 을 x 축으로 -1 만큼 이동한 것이므로

$\mathrm{Q}(b-1,a)$ 이다.

또, P 와 Q 는 $y=2x$ 에 대하여 대칭이므로

$\left(\frac{a+b-1}{2},\frac{a+b}{2}\right)$ 는 $y=2x$ 위의 점이고 $\overline{\mathrm{PQ}}$와 $y=2x$는 수직이다. $\therefore$ (선분 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 기울기)$=\frac{b-a}{a-b+1}=-\frac{1}{2}\cdots$① 이고,

$\frac{a+b}{2}=2\left(\frac{a+b-1}{2}\right)\cdots$②

①에서 $a-b=1$

②에서 $a+b=2$

$\therefore\ a=\frac{3}{2},\ b=\frac{1}{2}$, $2a-4b=3-2=1$

12. 이차함수 $y = 2x^2 - 4x + k$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행 이동하였더니 최솟값이 4가 되었다. 이 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$y = 2(x^2 - 2x + 1) + k - 2 = 2(x-1)^2 + k - 2$

$y = 2(x-1)^2 + k - 2$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1 만큼 평행 이동한 식은

$y = 2(x-1)^2 + k - 2 + 1$ 이다.

최솟값이 4 가 되었으므로 $k - 1 = 4$ 이다.

$\therefore k = 5$

13. 연립부등식 $\begin{cases} 3x+7 \leq -x+31 \\ x+a \geq -3 \end{cases}$ 의 해가 다음과 같을 때, a 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -2

해설

$\begin{cases} 3x+7 \leq -x+31 \\ x+a \geq -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x \leq 24 \\ x+a \geq -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ x \geq -3-a \end{cases}$

$\therefore \ -3-a \leq x \leq 6$

해가 $-1 \leq x \leq 6$ 이므로 $-3-a=-1$

$\therefore \ a=-2$

14. 연립부등식 $\begin{cases} x+2 \le 2x+3 \\ 3x \ge 5x-14 \end{cases}$ 의 해 x의 최댓값을 a, 최솟값을 b라고 할 때, $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$x+2 \le 2x+3$, $x \ge -1$

$3x \ge 5x-14$, $x \le 7$

$\rightarrow$ 연립부등식의 해는 $-1 \le x \le 7$

따라서 x의 최댓값은 7, 최솟값은 -1이다.

$\therefore a-b = 7-(-1) = 8$

15. 연립부등식

$$\begin{cases} a+5x<2a \\ 2(x-1)\geq -6 \end{cases}$$

이 해를 갖지 않기 위한 정수 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -10

해설

$a+5x<2a$

$x<\dfrac{a}{5}$

$2(x-1)\geq -6$

$2x-2\geq -6$

$\therefore\ x\geq -2$

연립부등식이 해를 갖지 않으려면

$\dfrac{a}{5}\leq -2$

$\therefore\ a\leq -10$

따라서 a 의 최댓값은 -10 이다.

16. 연속하는 세 홀수의 합이 45 보다 크고 55 보다 작을 때, 세 홀수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

▷ 정답 : 17

▷ 정답 : 19

해설

연속하는 세 자연수를 $x-2,\ x,\ x+2$로 각각 두면

$45 < (x-2)+x+(x+2) < 55$

$45 < 3x < 55$

$$\Rightarrow \begin{cases} 45 < 3x \\ 3x < 55 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 15 \\ x < \dfrac{55}{3} \end{cases}$$

$\therefore\ x = 16,\ 17,\ 18$

x 는 홀수이므로 17 이다.

따라서 세 홀수는 15, 17, 19 이다.

17. $1 < x < 3$ 에서 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위가 $\alpha < a < \beta$ 일 때, $3\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

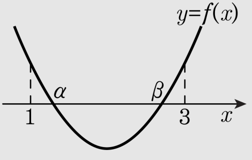
▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$f(x) = x^2 - ax + 4$ 라 하면

$1 < x < 3$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D = a^2 - 16 > 0$ 에서 $(a+4)(a-4) > 0$

$\therefore\ a < -4$ 또는 $a > 4$

(ii) $f(1) = 5 - a > 0$ 에서 $a < 5$

$f(3) = 13 - 3a > 0$ 에서 $a < \dfrac{13}{3}$

$\therefore\ a < \dfrac{13}{3}$

(iii) $y = f(x)$ 의 그래프의 대칭축이

$x = \dfrac{a}{2}$ 이므로 $1 < \dfrac{a}{2} < 3$

$\therefore\ 2 < a < 6$

(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는 $4 < a < \dfrac{13}{3}$

따라서, $\alpha = 4,\ \beta = \dfrac{13}{3}$ 이므로 $3\alpha\beta = 52$

18. 두 직선 $ax+by+1=0,\ bx+ay+1=0$ 이 서로 평행할 때, 두 직선 사이의 거리를 a 에 대한 식으로 나타내면?

① $\dfrac{\sqrt{1}}{|a|}$ ② $\dfrac{\sqrt{2}}{|a|}$ ③ $\dfrac{\sqrt{3}}{|a|}$ ④ $\dfrac{2}{|a|}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{5}}{|a|}$

해설

두 직선이 평행하면 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{a}\neq\dfrac{1}{1}$

$\therefore\ a=-b\ (\because\ a\neq b)$

직선 $ax+by+1=ax-ay+1=0$ 위의 한 점을

잡으면 $\mathrm{P}\left(0,\ \dfrac{1}{a}\right)$ 이므로 직선

$bx+ay+1=0$ 에서 $-ax+ay+1=0$ 까지의

거리는 $\dfrac{\left|(-a)\cdot 0+a\cdot\dfrac{1}{a}+1\right|}{\sqrt{a^2+a^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{|a|}$

19. 두 직선 $3x+4y=24$와 $3x+4y=4$사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점과 나머지 직선 사이의 거리를 구하면 된다.

$3x+4y=24$의 점 $(0,6)$

$$\frac{|0\times3+6\times4-4|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4$$

20. 모든 실수 k 에 대하여 직선 $(1+k)x+y-2k=0$ 에 대칭이고, 반지름의 길이가 3 인 원의 방정식을 구하면?

① $(x+2)^2+(y-2)^2=9$

② $(x-2)^2+(y+2)^2=9$

③ $(x-1)^2+(y-2)^2=9$

④ $(x+1)^2+(y+2)^2=9$

⑤ $(x-1)^2+(y+2)^2=9$

해설

$(1+k)x+y-2k=0$

$x+kx+y-2k=0$ (k 는 임의의 실수)

$x+y+k(x-2)=0$

이 직선은 항상 $(2,\ -2)$ 를 지난다.

따라서 이와 같은 모든 직선에 대칭인 원의 중심은 $(2,-2)$ 이다.

$\therefore (x-2)^2+(y+2)^2=9$

21. 두 원 $x^2 + y^2 - 2ay + 8a - 25 = 0$ 와 $x^2 + y^2 = 1$ 이 외접할 때 a 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

두 원이 외접하면 중심 사이의 거리와 반지름의 합이 일치한다.

$\Rightarrow \quad x^2 + (y-a)^2 = a^2 - 8a + 25, \quad x^2 + y^2 = 1$

중심사이의 거리 : a

반지름의 합 : $1 + \sqrt{a^2 - 8a + 25}$

$\Rightarrow \quad a - 1 = \sqrt{a^2 - 8a + 25}$

$\Rightarrow \quad a = 4$

22. $x^2+y^2-4x=0$, $x^2+y^2-6x-2y+8=0$ 의 교점을 지나는 원의 반지름의 최솟값은?

① $\sqrt{5}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

해설

주어진 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은
$(x^2+y^2-4x)+k(x^2+y^2-6x-2y+8)=0$
이 중에서 반지름이 최소인 경우는 공통현을 지름으로 하는 원이다.
결국 구하는 값은 공통현의 길이의 절반을 구하면 된다.
공통현의 방정식은 $x+y-4=0$,
$x^2+y^2-4x=0$ 의 중심은 $(2,\ 0)$ 반지름은 2 이고,
중심에서 공통현까지의 길이는 $\sqrt{2}$ 이므로
공통현의 길이의 절반은 $\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$,
구하는 값은 $\sqrt{2}$ 이다.

23. 두 원 $x^2+y^2-x-2y-2=0$, $x^2+y^2-2x-2y-3=0$ 의 교점의 좌표를 구하면?

① $(-1,0)$, $(-1,2)$
② $(-2,1)$, $(0,2)$
③ $(1,2)$, $(4,-2)$
④ $(4,2)$, $(-3,5)$
⑤ $(-6,7)$, $(-8,4)$

해설

공통현의 방정식은
$(x^2+y^2-x-2y-2)-(x^2+y^2-2x-2y-3)=0$ 에서 $x=-1$
공통현의 방정식 $x=-1$ 을
$x^2+y^2-x-2y-2=0$ 에 대입하면
$(-1)^2+y^2-(-1)-2y-2=0$
$y^2-2y=0$
$y(y-2)=0$
$\therefore y=0$ 또는 $y=2$
따라서, 구하는 교점의 좌표는 $(-1,0)$, $(-1,2)$

24. 직선 $2x-y-1=0$ 에 대하여 점 $(3,\ 0)$ 과 대칭인 점의 좌표를 구하면?

① $(1,\ 2)$ ② $(-1,\ 2)$ ③ $(1,-2)$
④ $(2,-1)$ ⑤ $(-2,\ 1)$

해설

구하는 좌표를 (a,b) 로 놓는다.
점 (a,b) 는 점$(3,\ 0)$ 과 직선 $2x-y-1=0$ 에 대하여 대칭이고, 이 때 점 $(3,0)$과 점 (a,b) 를 연결하는 선분에서 $2x-y-1=0$ 와 수직으로 만나므로

중점 M 의 좌표는 $M\left(\dfrac{a+3}{2},\ \dfrac{b}{2}\right)$

$2\times\dfrac{a+3}{2}-\dfrac{b}{2}-1=0$

$2a+6-b-2=0$

$2a-b+4=0 \quad \cdots\cdots$(가)

기울기는 $\dfrac{b}{a-3}\times 2=-1$ 이므로

$a=-2b+3$

이것을 (가)에 대입하면

$2(-2b+3)-b+4=0 \qquad \therefore\ a=-1,\ b=2$

25. 어떤 일차식 $g(x)$에 대하여

$x^4+2x^3-3x^2-g(x)=\{(x-\alpha)(x-\beta)\}^2$가 성립한다. 이 때, $\alpha\beta$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$
\begin{aligned}
(\text{우변}) &= \{(x-\alpha)(x-\beta)\}^2 \\
&= \{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}^2 \\
&= x^4-2(\alpha+\beta)x^3 \\
&\quad +\{(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta\}x^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)x+\alpha^2\beta^2 \\
&= x^4+2x^3-3x^2-g(x)
\end{aligned}
$$

$g(x)$가 일차식이므로 양변의 계수를 비교하면

$-2(\alpha+\beta)=2,\ (\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta=-3$

$\therefore\ \alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=-2$

26. 다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지는 5이고, 몫 $Q(x)$를 다시 $x+3$으로 나누면 나머지가 3이다. 이때, $f(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지는?

① 10 ② -10 ③ 9 ④ -9 ⑤ 8

해설

나머지정리에 의해 $f(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지는 $f(-3)$이다.
$f(x)=(x-2)Q(x)+5$에서
$x=-3$을 대입하면 $f(-3)=(-3-2)Q(-3)+5$
$Q(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 3이므로 $Q(-3)=3$
$\therefore\ f(-3)=-10$

27. 다항식 $f(x)$를 $ax+b(a \neq 0)$로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라고 한다. $xf(x)$를 $x+\frac{b}{a}$로 나눈 나머지를 구하면 ?

① $\frac{bR}{a}$ ② $\frac{b}{Ra}$ ③ $-\frac{b}{a}R$ ④ $\frac{aR}{b}$ ⑤ $-\frac{aR}{b}$

해설

$$f(x) = (ax+b)Q(x)+R$$
$$= a\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R$$

$\therefore\ x\cdot f(x)$

$$= ax\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+Rx$$
$$= ax\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R\left(x+\frac{b}{a}\right)-\frac{b}{a}R$$
$$= \left(x+\frac{b}{a}\right)\{axQ(x)+R\}-\frac{b}{a}R$$

따라서, 구하는 몫은 $axQ(x)+R$

나머지는 $-\frac{bR}{a}$

해설

$f(x) = (ax+b)Q(x)+R$에서

나머지 정리에 의해 $f(-\frac{b}{a}) = R$

$x\cdot f(x) = \left(x+\frac{b}{a}\right)Q'(x)+R'$이라 하면

나머지 정리에 의해 $-\frac{b}{a}f(-\frac{b}{a}) = R'$

$f(-\frac{b}{a}) = R$를 대입하면 $R' = -\frac{b}{a}R$

28. $a+b+c=1$을 만족하는 세 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $x=a-2b+3c$,$y=b-2c+3a$, $z=c-2a+3b$라 할 때, $(x^2+2xy+1)+(y^2+2yz+1)+(z^2+2zx+1)$의 값을 구하면?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$a+b+c=1$이므로

$x+y+z=2a+2b+2c=2(a+b+c)=2$

$\therefore\ (x^2+2xy+1)+(y^2+2yz+1)+(z^2+2zx+1)$

$=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx+3$

$=(x+y+z)^2+3$

$=2^2+3=4+3=7$

29. 다음 방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4+5x^3-12x^2+5x+1=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$x=0$을 대입하면
$1=0$이 되어 모순이므로 $x\neq 0$이다.
따라서, 주어진 식의 양변을
x^2으로 나누면

$$x^2+5x-12+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-12=0$$

$$\therefore\ \left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-14=0$$

여기서 $x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면
$X^2+5X-14=0,\ (X+7)(X-2)=0$
$\therefore\ X=-7$ 또는 $X=2$
(i) $X=-7$일 때,
$x+\frac{1}{x}=-7$에서
$x^2+7x+1=0$
$\therefore\ \frac{-7\pm 3\sqrt{5}}{2}$
(ii) $X=2$일 때,
$x+\frac{1}{x}=2$에서
$x^2-2x+1=0,\ (x-1)^2=0$
$\therefore\ x=1$
(i), (ii)로부터
$x=1$(중근) 또는 $x=\frac{-7\pm 3\sqrt{5}}{2}$
따라서, 모든 근의 합은

$$1+\frac{-7+3\sqrt{5}}{2}+\frac{-7-3\sqrt{5}}{2}=-6\text{이다.}$$

30. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $|x-2|<\sqrt{3}$의 해와 같을 때, 이차부등식 $cx^2+(b+c)x+(a+b+5c)>0$ 의 해를 구하면?

① $0<x<1$ ② $1<x<2$ ③ $2<x<3$
④ $3<x<4$ ⑤ $4<x<5$

해설

$|x-2|<\sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3}<x-2<\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$

$ax^2+bx+c>0 \Rightarrow x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}<0(\because a<0)$

$-\dfrac{b}{a}=4, \dfrac{c}{a}=1 \Rightarrow b=-4a, c=a$

그러면 주어진 식 $cx^2+(b+c)x+(a+b+5c)>0$에서

$ax^2+(-4a+a)x+a-4a+5a>0$

$ax^2-3ax+2a>0\ (\because a<0)$

$x^2-3x+2<0$

$(x-2)(x-1)<0$

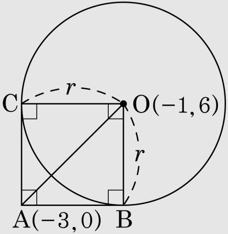
따라서 $1<x<2$

31. 점 A$(-3,\ 0)$에서 원 $(x+1)^2+(y-6)^2=r^2$에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, r의 값은? (단, $r>0$)

① 4　　② $3\sqrt{2}$　　③ $2\sqrt{5}$　　④ $2\sqrt{6}$　　⑤ 5

해설

원 $(x+1)^2+(y-6)^2=r^2$은 중심이 O$(-1,\ 6)$이고
반지름의 길이가 $r(r>0)$인 원이다.
점 A에서 이 원에 그은 두 접선이 서로 수직이면 다음 그림과 같이
□ABOC는 한 변의 길이가 r인 정사각형이 된다.



이 때, 두 점 A와 O 사이의 거리가 $r\sqrt{2}$가 되어야 하므로

$$\sqrt{\{-1-(-3)\}^2+(6-0)^2}=r\sqrt{2}$$

$$\sqrt{40}=r\sqrt{2}$$

$$\therefore\ r=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

32. 모든 복소수 z 에 대하여 다음 중 실수인 것을 모두 고르면? (단 $\overline{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

ㄱ $(z+1)^2$

ㄴ $(2z+1)(\overline{z}+1)-z$

ㄷ $(z^2+z+1)(\overline{z}+1)+\left((\overline{z})^2+\overline{z}+1\right)(z+1)$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ (반례) $z=i$ 이면 $(z+1)^2=(i+1)^2=2i$
(허수)

ㄴ $(2z+1)(\overline{z}+1)-z=2z\overline{z}+(z+\overline{z})+1$ (실수)
($\because z\overline{z}, z+\overline{z}$ 모두 실수이다.)

ㄷ $(z^2+z+1)(\overline{z}+1)=Z$ 라 하면
(준식)$=Z+\overline{Z}$ 이므로 실수

따라서 실수인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

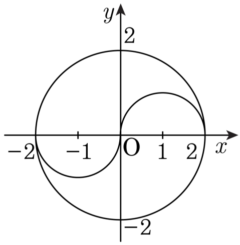
33. 이차방정식 $x^2-(m+1)x-m+2=0$의 두 근이 모두 정수가 되도록 하는 정수 m의 값의 합은?

① -12 ② -8 ③ 0 ④ 8 ⑤ 12

해설

두 정수근을 $\alpha,\ \beta$라 하자.
근과 계수 관계에 의해
$\alpha+\beta=m+1\quad \alpha\beta=-m+2$
$\alpha+\beta-1=2-\alpha\beta$
$(\alpha+1)(\beta+1)=4$
$\therefore\quad \alpha+1=\pm1\quad \beta+1=\pm4$
$\alpha+1=\pm4\quad \beta+1=\pm1$
$\alpha+1=\pm2\quad \beta+1=\pm2$(복호동순)
$\therefore\ (\alpha,\ \beta)=(0,3),\ (-2,-5),\ (3,0),\ (-5,-2),\ (1,1),\ (-3,-3)$
$m=\alpha+\beta-1$이므로 $m=2,\ -8,\ 1,\ -7$
$\therefore\ 2+(-8)+1+(-7)=-12$

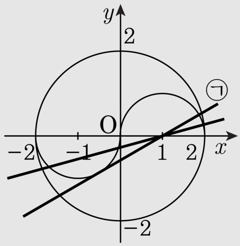
34. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 원과 반원으로 이루어진 태극문양이 있다. 태극문양과 직선 $y = a(x-1)$이 서로 다른 다섯 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값의 범위는?



① $0 < a < \dfrac{\sqrt{2}}{3}$　② $0 < a < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$
③ $0 < a < \dfrac{2}{3}$　④ $0 < a < \dfrac{\sqrt{5}}{3}$
⑤ $0 < a < \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

해설

직선 $y = a(x-1)$의 그래프는 실수 a의 값에
관계없이 항상 점 $(1, 0)$을 지나므로
직선이 태극문양과 서로 다른 다섯 점에서 만나는 경우는 다음 그림과 같이 x축과 직선 ㉠사이를 움직이는 직선일 때이다.



이때, 직선의 기울기는 양수이므로 $a > 0$
직선과 제3사분면의 반원이 접하는 경우,
점 $(-1, 0)$과 직선 $y = a(x-1)$,
즉 $ax - y - a = 0$사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과 같으므로

$$\frac{|-a-0-a|}{\sqrt{a^2+1}} = 1, |2a| = \sqrt{a^2+1}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$4a^2 = a^2 + 1, a^2 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore a = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

그런데 $a > 0$이므로 $a = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

따라서, 직선과 태극문양이 서로 다른 다섯 점에서 만나기 위한 실수 a의 값의 범위는

$0 < a < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 이다.

35. 두 원 $x^2+y^2=1$, $x^2+(y-2)^2=4$ 의 공통접선의 방정식을 $y=ax+b$ 라고 할 때, a^2+b^2 의 값을 구하면?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

원의 중심에서 직선 $y=ax+b$ 까지의 거리가 반지름과 같으면 되므로

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=1 \Longleftrightarrow b^2=a^2+1 \cdots ①$$

$$\frac{|b-2|}{\sqrt{a^2+1}}=2 \Longleftrightarrow (b-2)^2=4(a^2+1) \cdots ②$$

①, ② 에서 $b^2 \geq 1$ 임을 유의하면

$b=-2,\ a^2=3$

따라서 $a^2+b^2=7$

해설

중심 $C_1(0,0)$ 과 직선 $ax-y+b=0$

사이의 거리는 $\dfrac{|a\cdot 0-1\cdot 0+b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\dfrac{|b|}{\sqrt{a^2+1}}$

반지름의 길이와 같으므로

$\dfrac{|b|}{\sqrt{a^2+1}}=1$, $|b|=\sqrt{a^2+1}$

$\therefore\ b^2=a^2+1 \cdots\cdots ①$

중심 $C_2\ (0,2)$ 와 직선 $ax-y+b=0$

사이의 거리는

$\dfrac{|b-2|}{\sqrt{a^2+1=2}}$, $|b-2|=2\sqrt{a^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$b^2-4b=4a^2 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠ $\times 4-$ ㉡ 에서

$3b^2+4b-4=0$, $(3b-2)(b+2)=0$

$\therefore\ b=\dfrac{2}{3},\ -2$

이 때 $b^2=a^2+1 \geq 1$ 에서 $b=-2$

이것을 ㉠에 대입하면 $a^2=3$

$\therefore a^2+b^2=3+4=7$