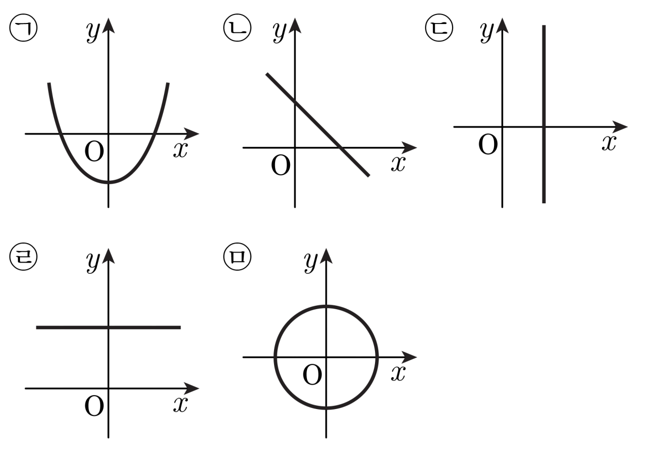
1. 다음 그래프 중 함수인 것은 모두 몇 개인가?



① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

주어진 그래프가 함수가 되기 위해서는 집합 X의 각 원소 x의 함수값 $f(x)$가 하나로 결정되어야 한다. 그러나 ㉢, ㉤은 x의 함수값 $f(x)$가 두개 이상인 점이 존재하므로 함수가 될 수 없다.

2. 1보다 큰 자연수 x에 대하여 $f(x) = \dfrac{x - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$ 로 정의 할 때, $f(25)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

$f(x) = \dfrac{x - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \dfrac{\frac{x^2 - 1}{x}}{\frac{x - 1}{x}} = x + 1$

$\therefore f(25) = 26$

3. 다음 (　　　) 안에 알맞은 말을 써라.

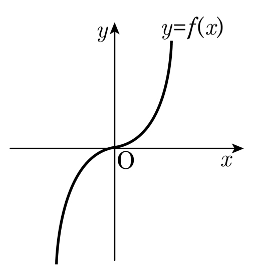
함수 $f(x)$ 의 치역과 공역이 같고, 정의역의 서로 다른 원소에 치역의 서로 다른 원소가 대응할 때, 이 함수를 (　　　) 이라고 한다.

▶ 답 :

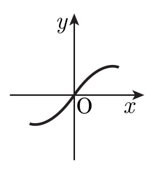
▷ 정답 : 일대일대응

해설

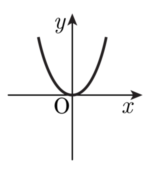
4. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 다음 중 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프로 적당한 것은 무엇인가?



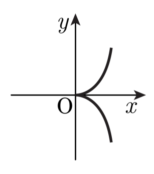
①



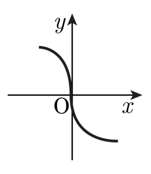
②



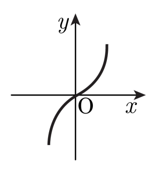
③



④



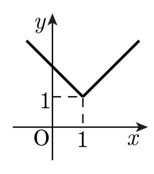
⑤

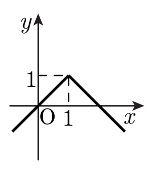


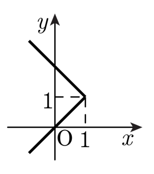
해설

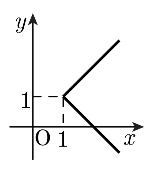
$y = f(x)$ 의 그래프와
그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는
직선 $y = x$에 대하여 대칭이다.

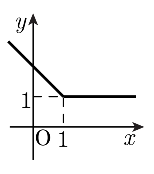
5. 다음 중 함수 $y = | x - 1 | + 1$ 의 그래프의 모양으로 가장 적당한 것은?

①


②


③


④


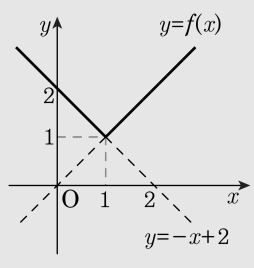
⑤


해설

$| x - 1 | = \begin{cases} x - 1 \ (x \geq 1) \\ 1 - x \ (x < 1) \end{cases}$ 이므로

$y = \begin{cases} (x-1) + 1 = x \quad (x \geq 1) \\ 1 - x + 1 = -x + 2 \ (x < 1) \end{cases}$

따라서 이 함수의 그래프는 다음 그림과 같다.



6. 함수 $f(x)$ 는 임의의 두 실수 a, b 에 대하여 $f(a+b)=f(a)+f(b)$ 를 만족시킨다. 이러한 함수를 다음에서 고르면?

① $f(x)=|x|$　　② $f(x)=-x^2$

③ $f(x)=3x$　　④ $f(x)=2x+3$

⑤ $f(x)=x^3+3x$

해설

① $f(a+b)=|a+b|$
$f(a)+f(b)=|a|+|b|$
이 때 $|a+b| \le |a|+|b|$

② $f(a+b)=-(a+b)^2=-a^2-2ab-b^2$
$f(a)+f(b)=-a^2-b^2$

③ $f(a+b)=3(a+b)=3a+3b=f(a)+f(b)$

④ $f(a+b)=2(a+b)+3$
$f(a)+f(b)=2a+3+2b+3=2(a+b)+6$

⑤
$$\begin{aligned} f(a+b) &= (a+b)^3+3(a+b) \\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2+3) \\ f(a)+f(b) &= a^3+3a+b^3+3b \\ &= a^3+b^3+3(a+b) \\ &= (a+b)(a^2-ab+b^2+3) \end{aligned}$$

7. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 A에서 A로의 함수 f 중에서 $f(x) = f^{-1}(x)$를 만족시키는 것의 개수는?

① 2개　② 3개　③ 4개　④ 6개　⑤ 9개

해설

역함수 f^{-1}가 존재하므로, f는 일대일대응이다.

(i) $f(1) = 1$일 때,

$f(2) = 2,\ f(3) = 3$ 또는 $f(2) = 3,\ f(3) = 2$

(ii) $f(1) = 2$일 때,

$f(2) = f^{-1}(2) = 1$이므로 $f(3) = 3$

(iii) $f(1) = 3$일 때,

$f(3) = f^{-1}(3) = 1$이므로 $f(2) = 2$

(i), (ii), (iii)에서 함수 f의 개수는 4개이다.

8. 두 함수 $f(x) = -x + a$, $g(x) = ax + b$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = 2x - 4$ 일 때, ab 의 값은 얼마인가?

① -2 ② -3 ③ -4 ④ -5 ⑤ -6

해설

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(ax + b)$

$= -(ax + b) + a = -ax + a - b$ 이므로 $-ax + a - b = 2x - 4$

그런데, 이것은 x 에 대한 항등식이므로

$a = -2, b = 2$

$\therefore ab = -4$

9. 함수 $f(x) = ax - 1$ 과 그 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 같도록 상수 a 의 값을 정하면?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

해설

$y = f(x)$ 라 하면 $y = ax - 1$
이것을 x 에 대하여 정리하면 $ax = y + 1$
$\therefore\ f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x + \frac{1}{a}$
그런데 $f(x) = f^{-1}(x)$ 이고 모든 실수에 대하여 성립해야 하므로
$\frac{1}{a}x + \frac{1}{a} = ax - 1$
$\therefore\ \frac{1}{a} = a$ 이고 $\frac{1}{a} = -1$ 이어야 하므로
$\therefore\ a = -1$

10. 함수 $f(x) = ax+3$ 에 대하여 $f^{-1} = f$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값은?

① -2　　② -1　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

$f^{-1} = f$ 의 양변에 함수 f 를 합성하면

$f^{-1} \circ f = f \circ f$

이때, $f^{-1} \circ f = I$(I는항등함수) 이므로 $f \circ f = I$

즉 $(f \circ f)(x) = x$

$\therefore (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(ax+3)$

$= a(ax+3)+3 = a^2x+3a+3 = x$

따라서 $a^2 = 1,\ 3a+3 = 0$ 이므로 $a = -1$

11. 함수 $y = |x+1| - |x-3|$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = |x+1| - |x-3|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때

$y = -(x+1) + x - 3 = -4$

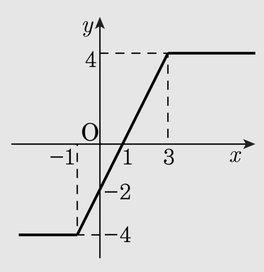
ii) $-1 \le x < 3$ 일 때

$y = x + 1 + x - 3 = 2x - 2$

iii) $x \ge 3$ 일 때

$y = x + 1 - (x - 3) = 4$

이상에서 주어진 함수의 그래프가 다음 그림과 같으므로



$M = 4, m = -4$

$\therefore M - m = 4 - (-4)$

$= 8$

12. 다음 중 우함수인 것을 모두 고르면?

㉠ $y = x^4 - 3x^2$	㉡ $y = \frac{1}{x}$	㉢ $y = \sqrt{x^2+1}$
㉣ $y = 4x$	㉤ $y = \frac{3}{x^2}$	㉥ $y = x^3$

① ㉠, ㉡, ㉢　② ㉠, ㉢, ㉤　③ ㉠, ㉤, ㉥
④ ㉡, ㉢, ㉥　⑤ ㉡, ㉣, ㉤

해설

우함수인 것은 $y = x^4 - 3x^2$, $y = \sqrt{x^2+1}$, $y = \frac{3}{x^2}$ 이고, 나머지는 모두 기함수이다.

13. 두 함수 $f(x) = ax+b$, $g(x) = 3x-2$에 대하여 $(f\circ g)(1) = 2$, $(g\circ f)(2) = 3$을 만족하는 상수 a, b의 합 $4a+b$를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$(f\circ g)(1) = 2$에서
$(f\circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = a+b$
$\therefore a+b = 2$

14. $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 일 때, $g(f(x))=x$가 되는 함수 $g(x)$는?

① $1-x$ ② $\dfrac{1}{1-x}$ ③ $\dfrac{x}{x-1}$ ④ $\dfrac{x-1}{x}$ ⑤ $\dfrac{x-1}{x+1}$

해설

$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 일 때

$g(f(x))=x$에서 $f(x)=t$로 놓으면

$\dfrac{1}{1-x}=t$ 에서 $(1-x)t=1,\ t-xt=1$

$xt=t-1,\ x=\dfrac{t-1}{t}$ 이므로 $g(t)=\dfrac{t-1}{t}$

$\therefore\ g(x)=\dfrac{x-1}{x}$

15. $x \neq -1$ 인 실수에서 정의된 분수함수 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ 에 대하여 $f^2 = f \circ f, \quad \cdots \quad f^{n+1} = f^n \circ f$ 이 성립할 때, $f^{2005}\left(-\frac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

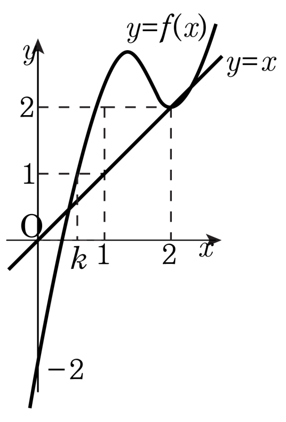
해설

$f^2(x) = f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}} = x$ 이므로

따라서, $f^{2n}(x) = x$ 이다. (단, n 은 자연수)

$\therefore\ f^{2005}\left(-\frac{1}{2}\right) = f^{2004}\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$

16. 다음 그림과 같이 함수 $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 2$ 에서 $f(k) = 1$ 일 때, $f^{10}(k)$ 의 값은?(단, $f^2 = f \circ f,\ f^3 = f^2 \circ f,\ f^n = f^{n-1} \circ f$)



① 1　② 2　③ 3　④ 5　⑤ 11

해설

$f(k) = 1$
$f^2(k) = f(f(k)) = f(1) = 2$
$f^3(k) = f^2 \circ f(k) = f^2(f(k)) = f^2(1)$
$= f(f(1)) = f(2) = 2$
$\vdots$
$f^{10}(k) = 2$

17. 두 집합 $X = \{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$, $Y = \{y \mid a \leq y \leq b\}$ 에서 $f : X \to Y$, $f(x) = 3x - 1$ 의 역함수 $f^{-1} : Y \to X$ 가 존재할 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

함수 $f(x)$ 는 역함수가 존재하므로 일대일 대응이다. 따라서 함수 $f(x)$ 는 점 $(0,\ a)$, $(2,\ b)$를 지나야 한다.

$a = f(0) = -1$, $b = f(2) = 5$

$\therefore\ a + b = 4$

18. 함수 $f(x) = 2x - 1, g(x) = \sqrt{x-1}$ 에 대하여 $(f \circ (f \circ g)^{-1} f)(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$$(f \cdot (f \cdot g)^{-1} f)(2) = (f \cdot g^{-1})(2)$$
$$= f(g^{-1}(2))$$

$g^{-1}(2) = k$라면 $g(k) = 2$

$g(k) = \sqrt{(k-1)} = 2 \rightarrow k = 5$

$\therefore \quad f(g^{-1}(2)) = f(5) = 10 - 1 = 9$

19. 두 함수 f, g 가 $f(2) = 3$, $g^{-1}(1) = 4$ 일 때, $f^{-1}(3) + g(4)$ 의 값을 구하시오.

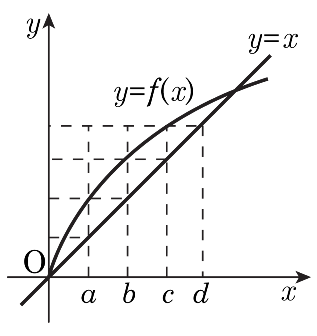
▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

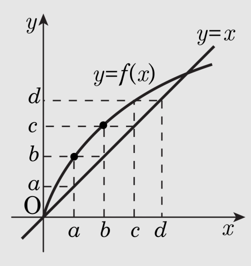
$f(2) = 3$ 에서 $f^{-1}(3) = 2$ 이고
$g^{-1}(1) = 4$ 에서 $g(4) = 1$ 이므로
$\therefore\ f^{-1}(3) + g(4) = 2 + 1 = 3$

20. $y=f(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, $b+f(b)+f^{-1}(b)$ 의 값을 구하면?



① b　② $b+d$　③ $2b+c$
④ $b+c+d$　⑤ $a+b+c$

해설

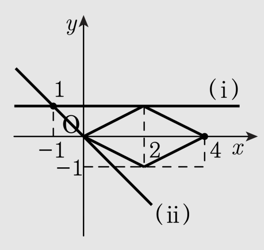


그림에서 $f(b)=c,\ f^{-1}(b)=a$ 이므로
$b+f(b)+f^{-1}(b)=b+c+a$

21. $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프와 직선 $y=mx+m+1$이 만나도록 하는 m의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설



함수 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는
$|x|+2|y|=2$ 의 그래프를
x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
이때, $|x|+2|y|=2$ 의 그래프는
$x+2y=2$ 의 그래프에서
$x \geq 0$, $y \geq 0$ 인 부분을
각각 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동한 것이고, 이를 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
직선 $y=mx+m+1$은 m의 값에 관계없이 점 $(-1,\ 1)$을 지나므로 두 그래프가 만나려면
(i) $m \leq 0$
(ii) $y=mx+m+1$ 이 원점을 지날 때
$0=m+1$ 에서 $m=-1$ 이므로 $m \geq -1$
(i), (ii) 에서 m 의 값의 범위는 $-1 \leq m \leq 0$
따라서 m 의 최댓값과 최솟값의 합은 -1 이다.

22. 다음 함수 중 우함수에는 ‘우’, 기함수에는 ‘기’, 우함수도 기함수도 아닌 함수는 ‘×’를 써 넣을 때, 알맞은 것은?

(1) $f(x) = 3x + 1$ (　　)   (2) $f(x) = 3x^2 - 2$ (　　)   (3) $f(x) = x^3 - x$ (　　)

① ×, 우, 기　　② 우, ×, 기　　③ 기, 우, ×
④ 기, ×, 우　　⑤ 우, 기, ×

해설

(1) $f(-x) = -3x + 1$
따라서 $f(x)$ 는 우함수도, 기함수도 아니다.
(2) $f(-x) = 3(-x)^2 - 2 = 3x^2 - 2$
따라서 $f(-x) = f(x)$ 이므로 $f(x)$ 는 우함수이다.
(3) $f(-x) = 3(-x)^3 - (-x) = -x^3 + x$
따라서 $f(-x) = -f(x)$ 이므로 $f(x)$ 는 기함수이다.

23. 함수 $f(x) = 2x^2 + 1$, $g(x) = 3x^3$ 에 대하여 다음 <보기>에 있는 함수 중 그 그래프가 원점에 대하여 대칭인 것을 모두 고른 것은 ?

보기

Ⅰ. $f(g(x))$ Ⅱ. $g(g(x))$

Ⅲ. $\{g(x)\}^2$ Ⅳ. $\dfrac{g(x)}{f(x)}$

① Ⅰ, Ⅱ ② Ⅰ, Ⅳ ③ Ⅱ, Ⅲ ④ Ⅱ, Ⅳ ⑤ Ⅲ, Ⅳ

해설

$f(-x) = f(x)$, $g(-x) = -g(x)$ 에서

Ⅰ. $F(x) = f(g(x))$ 로 놓으면

$F(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x))$

$\therefore\ F(-x) = F(x)$

Ⅱ. $F(x) = g(g(x))$ 로 놓으면

$F(-x) = g(g(-x)) = g(-g(x)) = -g(g(x))$

$\therefore\ F(-x) = -F(x)$

Ⅲ. $F(x) = \{g(x)\}^2$ 로 놓으면

$F(-x) = \{g(-x)\}^2$

$= \{-g(x)\}^2 = \{g(x)\}^2$

$\therefore\ F(-x) = F(x)$

Ⅳ. $F(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$ 로 놓으면

$F(-x) = \dfrac{g(-x)}{f(-x)} = -\dfrac{g(x)}{f(x)}$

$\therefore\ F(-x) = -F(x)$

따라서 원점에 대하여 대칭인 함수는 Ⅱ, Ⅳ

24. 함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$가 기함수이고 $f(1) = 3$을 만족시킬 때, $a + b - c$의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

기함수는 모든 실수 x에 대하여 원점에 대하여 대칭이어야 하므로

$f(-x) = -f(x)$

$ax^2 - bx + c = -ax^2 - bx - c$

따라서 $a = 0$, $c = 0$　$\therefore f(x) = bx$

$f(1) = 3$이므로 $f(1) = b = 3$

$\therefore a + b - c = 3$

25. 다음 중 함수 $y = x - [x]$ (단, $-1 \le x \le 2$) 의 값으로 가능한 것을 고르면? ($[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$-1 \le x < 0$ 일 때, $[x] = -1$ $\therefore y = x + 1$
$0 \le x < 1$ 일 때, $[x] = 0$ $\therefore y = x$
$1 \le x < 2$ 일 때, $[x] = 1$ $\therefore y = x - 1$
$x = 2$ 일 때, $[x] = 2$ $\therefore y = 0$
따라서, $y = x - [x]$ $(-1 \le x \le 2)$ 의 값으로 가능한 것은 ③ 뿐이다.