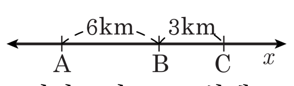
1. 그림에서 A, B, C는 도로가 통과하는 세 마을이다. A마을과 B마을 사이의 거리는 6 km, B마을과 C마을 사이의 거리는 3 km이다. 이 도로 위에 또 하나의 다른 마을이 있는데, 그 마을과 A 사이의 거리는 그 마을과 C 마을 사이의 거리의 2배이다. 그 마을과 B마을 사이의 거리는?

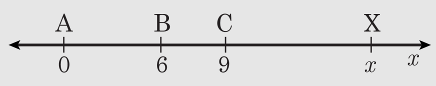


① 6 km　　② 9 km　　③ 12 km

④ 15 km　　⑤ 18 km

해설

그림과 같이 A마을을 원점으로 하고, 구하고자 하는 마을을 X라 하면



A(0), B(6), C(9), X(x)

A마을과 X마을 사이의 거리는

C마을과 X마을 사이의 거리의 2배이므로

$|x-0| = 2|x-9|$

곧, $|x| = 2|x-9|$

$\therefore\ 2(x-9) = \pm x$

$\therefore\ x = 6$ 또는 $x = 18$

여기서 $x = 6$이면 X = B가 되므로 성립하지 않는다.

따라서 $x = 18$

이 때, X마을과 B마을 사이의 거리는 $18 - 6 = 12$(km)

2. 세 점 A$(3,\ 2)$, B$(-2,\ -3)$, C$(a,\ b)$를 꼭짓점으로 하는 $\triangle$ABC의 무게중심의 좌표 G$(1,\ 1)$일 때, $a+b$의 값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

$$\mathrm{G}\left(\frac{3+(-2)+a}{3},\ \frac{2+(-3)+b}{3}\right)=G(1,\ 1)$$ 이므로,

$\frac{3+(-2)+a}{3}=1,\ 3+(-2)+a=3,\ a=2$

$\frac{2+(-3)+b}{3}=1,\ 2+(-3)+b=3,\ b=4$

$\therefore\ a+b=6$

3. 두 직선 $y = 3x + 2$, $y = 4x - 1$ 의 교점을 지나는 직선 중 x 절편과 y 절편이 같은 직선을 구하면?

① $x + y - 14 = 0$
② $-x + y - 14 = 0$
③ $x - y - 14 = 0$
④ $x + y + 14 = 0$
⑤ $-x + y + 14 = 0$

해설

두 직선 $y = 3x + 2, y = 4x - 1$ 의
교점을 지나는 직선은
$(3x - y + 2) \cdot m + (4x - y - 1) = 0$
(m 은 상수) 로 나타낼 수 있다.
$\therefore (3m + 4)x - (m + 1)y + (2m - 1) = 0$
$\Leftrightarrow y = \dfrac{3m + 4}{m + 1}x + \dfrac{2m - 1}{m + 1}$
x 절편과 y 절편이 같으므로
이 직선의 기울기는 -1 이다.
따라서, $\dfrac{3m + 4}{m + 1} = -1$
$\therefore m = -\dfrac{5}{4}$
따라서, 구하는 직선의 방정식은 $x + y - 14 = 0$
(별해)
두 직선의 교점을 구하면 $3x + 2 = 4x - 1$ 에서
$x = 3,\ y = 11$
x 절편, y 절편이 같으면 기울기가 -1 이므로
$y - 11 = -1(x - 3)$
따라서, $y = -x + 14$

4. 두 점 A(1, 5), $B(-3,\ -1)$을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

① $(x+1)^2+(y+2)^2=13$　② $(x-1)^2+(y-2)^2=52$

③ $(x-1)^2+(y+2)^2=13$　④ $(x+1)^2+(y-2)^2=13$

⑤ $(x+1)^2+(y-2)^2=52$

해설

원의 중심은 두 점 A, B 의 중점이므로,

$\left(\frac{1-3}{2},\ \frac{5-1}{2}\right)=(-1,\ 2)$ 이다.

또, 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\sqrt{(-3-1)^2+(-1-5)^2}=\sqrt{13}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-2)^2=13$

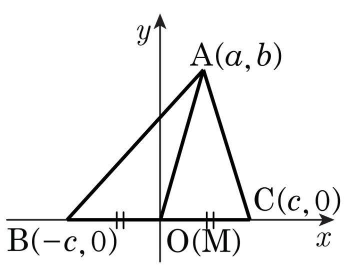
5. 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 $(1,\ \sqrt{3})$ 에 접하는 접선의 방정식은?

① $x+\sqrt{2}y=4$ ② $x+\sqrt{3}y=4$ ③ $\sqrt{2}x+y=4$
④ $\sqrt{3}x+y=4$ ⑤ $x-\sqrt{3}=4$

해설

$(1,\ \sqrt{3})$이 원 위의 점이므로
$1\cdot x+\sqrt{3}\cdot y=4$
$\therefore x+\sqrt{3}y=4$

6. 다음은 $\triangle\mathrm{ABC}$ 에서 변 BC 의 중점을 M 이라고 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=$ (가) $\left(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2\right)$ 이 성립함을 보이는 과정이다. (가) ~ (다)에 들어갈 말을 나열한 것으로 옳은 것은?

> 다음 그림과 같이 $\triangle\mathrm{ABC}$ 의 한 변 BC 를
> x 축, 변 BC 의 수직이등분선을 y 축으로 잡으면 M 은 원점이 된다.
>
> 
>
>
> 이때, 세 점 $\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}$ 의 좌표를 각각 $\mathrm{A}(a,b)$, $\mathrm{B}(-c,0)$, $\mathrm{C}(c,0)$ 으로 놓으면
> (나) $=\left\{(a+c)^2+b^2\right\}+\left\{(a-c)^2+b^2\right\}$
> $\quad=2\left(a^2+b^2+c^2\right)\cdots$ ㉠
> (다) $=\left(a^2+b^2\right)+(-c)^2=a^2+b^2+c^2\cdots$ ㉡
> ㉠, ㉡으로부터
> $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=$ (가) $\left(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2\right)$

① 2, $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{AM}}+\overline{\mathrm{BM}}$

② 2. $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2$, $\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2$

③ 3, $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{AM}}+\overline{\mathrm{BM}}$

④ 3. $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2$, $\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2$

⑤ 4, $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2$, $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2$

해설

파푸스의 정리에서

$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2$

$=\left\{(a+c)^2+b^2\right\}+\left\{(a-c)^2+b^2\right\}$

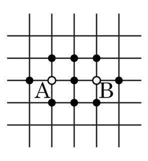
$=2\left(a^2+b^2+c^2\right)$

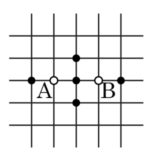
$\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2=\left(a^2+b^2\right)+(-c)^2$

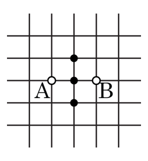
$\qquad\qquad\quad=a^2+b^2+c^2$

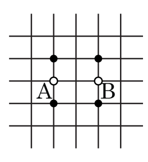
$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2\left(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2\right)$

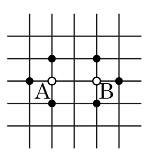
7. 이웃한 두 교차로 사이의 거리가 모두 1 인 바둑판 모양의 도로망이 있다. 두 차량이 각각 A 와 B 에서 출발하여 A, B 이외의 교차로 P 에서 만났다. 두 차량이 움직인 거리의 합이 4 가 되는 P 의 위치를 모두 표시하면?

①


②


③


④


⑤


해설

두 차량이 움직인 거리를 각각 x, y 라 하면

$x+y=4$

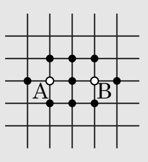
(단, x, y 는 양의 정수)

$\therefore\ x=1,\ y=3$ 또는 $x=2,\ y=2$

또는 $x=3,\ y=1$

각각의 경우에 해당하는 점 P 의 위치를

모두 모아서 그림으로 나타내면 다음과 같다.



8. △ABC 에서 변 AB, BC, CA 의 중점이 각각 $(-2,\ 0)$, $(3,\ 1)$, $(0,\ 3)$ 일 때, 점A 의 좌표를$(x_1,\ y_1)$ 이라 할 때, $x_1 + y_1$ 의 값은?

① -3　② -2　③ -1　④ 0　⑤ 1

해설

$A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$ 라 하면

$\dfrac{x_1 + x_2}{2} = -2$ 즉, $x_1 + x_2 = -4 \cdots$ ①

$\dfrac{x_2 + x_3}{2} = 3$ 즉, $x_2 + x_3 = 6 \cdots$ ②

$\dfrac{x_1 + x_3}{2} = 0$ 즉, $x_1 + x_3 = 0 \cdots$ ③

① + ② + ③ 하면 $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

$\therefore\ x_1 = -5,\ \ x_2 = 1,\ \ x_3 = 5$

$\dfrac{y_1 + y_2}{2} = 0$ 즉, $y_1 + y_2 = 0 \cdots$ ④

$\dfrac{y_2 + y_3}{2} = 1$ 즉, $y_2 + y_3 = 2 \cdots$ ⑤

$\dfrac{y_1 + y_3}{2} = 3$ 즉, $y_1 + y_3 = 6 \cdots$ ⑥

④ + ⑤ + ⑥ 하면 $y_1 + y_2 + y_3 = 4$

$\therefore\ y_1 = 2,\ \ y_2 = -2,\ \ y_3 = 4$

따라서, $x_1 + y_1 = -3$

9. 두 정점 A(1, 2), B(−3, 0)으로부터 같은 거리에 있는 점들의 자취의 방정식은?

① $y=2x+1$　② $y=2x-1$　③ $y=-2x+1$
④ $y=-2x-1$　⑤ $y=-x+2$

해설
구하는 점을 $P(x, y)$ 라 하면
$\overline{AP}=\overline{BP}$ 이므로
$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x+3)^2+y^2}$
양변을 제곱해서 정리하면
$-8x-4y-4=0$, $-4y=8x+4$
$\therefore\ y=-2x-1$

해설
두 점으로부터 같은 거리에 있는 점의 자취는 선분의 수직이등분이다.
$\overline{AB}$ 의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로
$\overline{AB}$ 의 수직이등분선은 기울기는 -2 이고
$\overline{AB}$ 의 중점$(-1, 1)$ 을 지난다.
$\therefore\ y-1=-2(x+1)$
$\therefore\ y=-2x-1$

10. 세 점 $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,2)$에 대하여 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$ 이 최소가 되도록 점 P 의 좌표를 정하면?

① $P\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$ ② $P\left(\frac{1}{2},\ -\frac{2}{3}\right)$ ③ $P\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$
④ $P\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $P\left(-\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$

해설

$P(x,\ y)$ 라 두면

$x^2+y^2+(x-1)^2+y^2+(x-1)^2+(y-2)^2$

$=3x^2-4x+3y^2-4y+6$

$=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{10}{3}$

$\therefore P\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ 일 때 최소

※ 점 P 는 $\triangle ABC$ 의 무게중심이 된다.

$\left(\frac{0+1+1}{3},\ \frac{0+0+2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$

11. 두 점 $(a,\ a+1)$과 $(a+1,\ a+2)$를 지나는 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 이 때 삼각형 OAB의 넓이는? (단, O는 원점이다.)

① $\frac{1}{2}$　　② 1　　③ $\frac{3}{2}$　　④ $\frac{1}{2}a$　　⑤ a

해설

두 점 $(a, a+1)$ 과 $(a+1, a+2)$를 지나는 직선의 기울기를 m이라 하면

$$m = \frac{(a+2)-(a+1)}{(a+1)-a} = 1$$

따라서, 두 점을 지나는 직선의 방정식은

$y-(a+1) = (x-a)$이다.

즉, $y = x+1$이다.

이 때, 두 점 A, B의 좌표는 $\mathrm{A}(-1, 0), \mathrm{B}(0, 1)$이므로

삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$

12. 직선 $l_1 : y = -\frac{1}{a}x + \frac{1}{a}$ 이 $l_2 : y = \frac{2}{b}x - \frac{1}{b}$ 과 수직이고 직선 $l_3 : y = -\frac{1}{b+1}x + \frac{1}{b+1}$ 과 평행하도록 하는 실수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2$ 의 값은?

① 3　　② 5　　③ 8　　④ 10　　⑤ 17

해설

두 직선 l_1 과 l_2 가 수직이므로 $-\frac{1}{a} \cdot \frac{2}{b} = -1$

$\therefore\ ab = 2$

두 직선 l_1 과 l_3 가 평행하므로

$-\frac{1}{a} = -\frac{1}{b+1} \quad \therefore a - b = 1$

$a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab = 1 + 2 \cdot 2 = 5$

13. 정점 A(1, 2)와 직선 $3x-4y-5=0$ 위의 점을 연결하는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $3x+4y=0$　② $x-2y+5=0$　③ $3x-4y=0$

④ $x+2y+5=0$　⑤ $x-2y-5=0$

해설

$3x-4y-5=0$ 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하면

$3a-4b-5=0 \cdots$ ㉠

$\overline{\mathrm{AP}}$의 중점을 $(X,\ Y)$라 하면

$X=\dfrac{1+a}{2}$, $Y=\dfrac{2+b}{2}$

$\therefore a=2X-1,\ b=2Y-2$

이것을 ㉠에 대입하면

$3(2X-1)-4(2Y-2)-5=0$

$\therefore 6X-8Y=0$

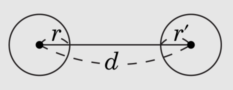
$\therefore 3x-4y=0$

14. 두 원 $C_1 : x^2 + y^2 = r^2$, $C_2 : (x-6)^2 + (y-8)^2 = 4$에 대하여 공통접선의 개수가 4개가 되도록 하는 양의 정수 r 의 개수는?

① 4개 ② 5개 ③ 6개 ④ 7개 ⑤ 8개

해설

공통접선이 4개인 경우 $r + r' < d$인 경우



$C_1 \Rightarrow (0,\ 0)\ r = r'$

$C_2 \Rightarrow (6,\ 8)\ r = 2$

중심거리 $(d) = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

$\therefore\ r + 2 < 10$

$r < 8$ (단, $r > 0$)

r의 갯수는 $r = 1,\ 2,\ 3 \cdots 7$이므로 7개이다.

15. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$$x^2+y^2-2x+4y+1=0, \quad 3x-4y+6=0$$

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 0개

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면
$(x-1)^2+(y+2)^2=2^2$
따라서 , 원의 중심 $(1, -2)$ 에서 직선
$3x-4y+6=0$ 까지의 거리 d 는
$d=\dfrac{|17|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{17}{5}$
이때, $\dfrac{17}{5}>2$ 이므로 원과 직선은 만나지 않는다.
$\therefore$ 교점의 개수 : 0 개

16. $x^2+y^2=1$ 일 때, $2x+y$ 의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

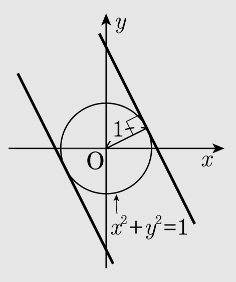
▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 $\sqrt{5}$

▷ 정답 : 최솟값 $-\sqrt{5}$

해설



구하는 $2x+y=k$ 라 하면 $y=-2x+k$ 에서 k 는 기울기가 -2 인 직선의 y 절편이다.
주어진 조건을 만족할 때, 직선은 다음 그림과 같이 존재하므로
점과 직선사이의 거리에서 $\dfrac{|k|}{\sqrt{5}} \le 1$

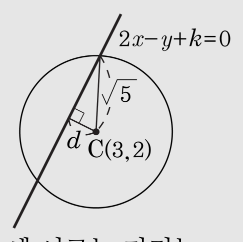
$\therefore\ -5 \le k \le \sqrt{5}$

17. 점 $\mathrm{A}(5,3)$, $\mathrm{B}(1,1)$ 을 지름의 양 끝점으로 하는 원과 직선 $y=2x+k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k 의 값의 범위는?

① $-12<k<-2$　② $-11<k<-1$　③ $-10<k<0$
④ $-9<k<1$　⑤ $-8<k<3$

해설

두 점 $\mathrm{A}(5,3)$, $\mathrm{B}(1,1)$ 의 중점이 $(3,2)$ 이므로 원의 중심의 좌표는$(3,2)$
점B와 중심 사이의 거리는
$\sqrt{(3-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}$
따라서 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$
원의 방정식은 $(x-3)^2+(y-2)^2=(\sqrt{5})^2$



원의 중심 $\mathrm{C}(3,2)$ 에서 직선 $2x-y+k=0$ 에 이르는 거리는

$$d=\frac{|2\cdot 3-2+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|k+4|}{\sqrt{5}}<\sqrt{5}$$

$|k+4|<5$, $-5<k+4<5$
$\therefore\ -9<k<1$

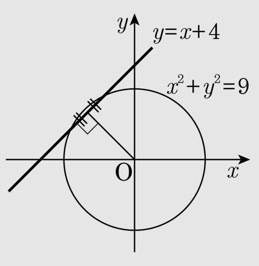
18. 직선 $y = x+4$가 원 $x^2+y^2 = 9$에 의해서 잘린 현의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

원의 중심 원점에서 직선에 이르는 거리는 직선 $x - y + 4 = 0$ 이므로 $\frac{|4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$



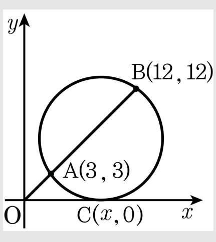
원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을 수직이등분하므로 피타고라스 정리에서 ,
현의 길이는 $2\sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2$

19. 좌표평면 위의 두 점 $(3,\ 3)$, $(12,\ 12)$ 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x 좌표는 ?

① $\frac{3}{2}$ ② 6 ③ $\frac{5}{2}$ ④ $6\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{15}{2}$

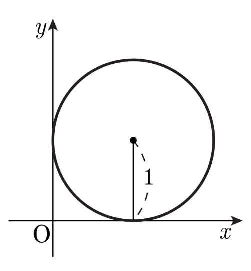
해설

그림에서 $\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$



$x^2 = \sqrt{3^2+3^2} \cdot \sqrt{12^2+12^2} = 72 \quad x = 6\sqrt{2}$

20. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원이 x 축, y 축에 동시에 접하고 있다. 이 원 위의 점 $(x,\ y)$에 대하여 $\frac{y+2}{x+1}$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\frac{y+2}{x+1}=k$라 하면 직선 $y+2=k(x+1)$ 은

k 값에 관계없이 점 $(-1, -2)$를 지난다.

이 때, 기울기 k 는 직선이 원래 접할 때 최댓값과 최솟값을 갖는다.

$$\frac{|k-1+k-2|}{\sqrt{k^2+1}}=1$$

$|2k-3|=\sqrt{k^2+1}$

$4k^2-12k+9=k^2+1$

$3k^2-12k+8=0$

최댓값과 최솟값은 이 방정식의 해이므로

근과 계수와의 관계에 의해 합은 4이다.

21. 평면상의 서로 다른 두 점 P, Q 에 대하여, 선분 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 3 등분점 중 P 에 가까운 쪽의 점을 $\mathrm{P} * \mathrm{Q}$ 로 나타낼 때, $\mathrm{A}(1,2)$, $\mathrm{B}(-2,3)$, $\mathrm{C}(-1,-1)$ 에 대하여 점 $(\mathrm{A} * \mathrm{B}) * \mathrm{C}$ 의 좌표를 구하면?

① $\left(-\frac{1}{3},\ \frac{11}{9}\right)$　② $(-3,\ 4)$　③ $\left(\frac{5}{2},\ \frac{1}{3}\right)$

④ $(2,\ -1)$　⑤ $\left(-\frac{4}{3},\ \frac{7}{2}\right)$

해설

$\mathrm{P} * \mathrm{Q}$ 는 P, Q 의 $1:2$ 내분점을 말한다.

$\therefore (\mathrm{A} * \mathrm{B}) = \left(\frac{1 \times (-2) + 2 \times 1}{1+2}, \frac{1 \times 3 + 2 \times 2}{1+2}\right) = \left(0, \frac{7}{3}\right)$

$\left(0, \frac{7}{3}\right) * \mathrm{C}$

$= \left(\frac{1 \times (-1) + 2 \times 0}{1+2}, \frac{1 \times (-1) + 2 \times \frac{7}{3}}{1+2}\right)$

$= \left(-\frac{1}{3}, \frac{11}{9}\right)$

$(\mathrm{A} * \mathrm{B}) * \mathrm{C} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{11}{9}\right)$

22. y축 위의 한 점 P로부터 두 직선 $x-y+3=0$, $x-y-1=0$ 에 이르는 거리가 같을 때, 점 P 의 좌표는?

① $(1, -2)$ ② $(-1, 2)$ ③ $(0, 2)$
④ $(0, 1)$ ⑤ $(0, -2)$

해설

y 축 위의 한 점을 P $(0, y)$ 라 하면 직선
$x-y+3=0$ 과 점 P 사이의 거리는
$$d_1 = \frac{|-y+3|}{\sqrt{2}}$$
직선 $x-y-1=0$
과 점 P 사이의 거리는
$$d_2 = \frac{|-y-1|}{\sqrt{2}}$$
$d_1 = d_2$ 이므로
$$\frac{|-y+3|}{\sqrt{2}} = \frac{|-y-1|}{\sqrt{2}}$$
양변을 제곱하여 정리하면
$-8y = -8 \therefore y = 1$
$\therefore P(0, 1)$

23. 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 이 x 축과 y 축에 동시에 접할 때, $c=ka^2$ 이 성립한다. 이 때, 상수 k 의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

$x^2+y^2+ax+by+c=0$ 을 표준형으로 나타내면

$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$

따라서, 중심이 $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ 이고

반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$ 이므로

이 원이 x 축과 y 축에 동시에 접하기 위해서는

$\left|-\frac{a}{2}\right|=\left|-\frac{b}{2}\right|=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$ 이어야 한다.

(i) $\left|-\frac{a}{2}\right|=\left|-\frac{b}{2}\right|$ 에서 $|a|=|b|$

$\therefore a^2=b^2 \cdots\cdots$ ㉠

(ii) $\left|-\frac{a}{2}\right|=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$ 의 양변을 제곱하면 $\frac{a^2}{4}=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$

$\therefore b^2=4c \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡ 에 대입하면 $a^2=4c$

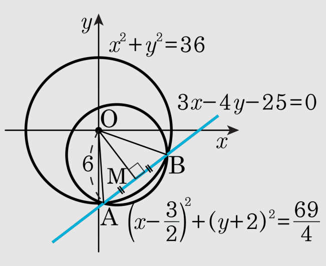
$\therefore c=\frac{1}{4}a^2$

$\therefore k=\frac{1}{4}$

24. 두 원 $x^2+y^2-36=0$, $x^2+y^2-3x+4y-11=0$의 공통현의 길이는?

① $\sqrt{11}$　② $2\sqrt{11}$　③ $3\sqrt{11}$　④ $4\sqrt{11}$　⑤ $5\sqrt{11}$

해설



두 원의 공통현의 방정식은

$x^2+y^2-36-(x^2+y^2-3x+4y-11)=0$

$\therefore 3x-4y-25=0 \cdots\cdots ㉠$

$x^2+y^2-3x+4y-11=0$에서

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+2)^2=\frac{69}{4}$

이므로 두 원을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.

다음의 그림과 같이 두 원의 교점을 A, B

$\overline{AB}$의 중점을 M이라 하면

원 $x^2+y^2=36$의 중심 $(0,0)$과 직선 ㉠사이의 거리 $\overline{OM}$은

$\overline{OM}=\frac{|-25|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=5$

원 $x^2+y^2=36$의 반지름의 길이는 6이므로

피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AM}=\sqrt{6^2-5^2}=\sqrt{11}$

따라서, 공통현의 길이 $\overline{AB}$는

$\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{11}$

25. 원 $x^2+y^2=1$ 밖의 점 $\mathrm{P}(3,\ 4)$에서 이 원에 두 개의 접선을 그을 때 그 접점을 Q, R이라고 하자. 직선 QR의 방정식을 $ax+by=1$라 할 때 $a+b$를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

접점의 좌표를 $\mathrm{Q}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{R}(x_2,\ y_2)$라고 하면
Q, R에서의 접선의 방정식은 각각
$x_1x+y_1y=1$, $x_2x+y_2y=1$이고,
두 접선은 모두 점 $\mathrm{P}(3,\ 4)$를 지나므로
$3x_1+4y_1=1$, $3x_2+4y_2=1$
여기서 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$는
방정식 $3x+4y=1$의 근이며, 이 두 접점을
지나는 직선은 오직 하나뿐이므로
직선 QR의 방정식은 $3x+4y=1$이다.
$\therefore\ a=3,\ b=4 \quad \therefore\ a+b=7$

26. 두 원 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$, $x^2+(y-6)^2=8$ 사이의 최단거리를 d 라 할 때, d^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

두 원 사이의 최단 거리는 중심거리에서
두 원의 반지름의 길이를 뺀 것과 같으므로

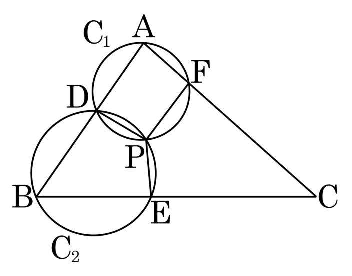
$d = \sqrt{\{0-(-1)\}^2+\{6-(-1)\}^2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2}$

$= 5\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2}$

$= 2\sqrt{2}$

$\therefore\ d^2 = 8$

27. 다음은 삼각형 ABC 의 각 꼭짓점을 지나는 원에 대한 어떤 성질을 설명한 것이다.



그림처럼 세 점 A, D, F 를 지나는 원 C_1 과 세 점 B, D, E 를 지나는 원 C_2 의 교점 P 가 삼각형 ABC 의 내부에 존재하도록 세 변 AB, BC, CA 위에 각각 점 D, E, F 를 잡는다.

$\angle DPF + \boxed{가} = 180°$

$\angle DPE + \boxed{나} = 180°$

$\angle DPF + \angle DPE = 360 - \left(\boxed{가} + \boxed{나}\right)$ 에서

$\angle FPE = \boxed{가} + \boxed{나}$

$\therefore\ \angle FPE + \angle C = 180°$

따라서 세 점 C, F, E 를 지나는 원을 C_3 라 할때, $\boxed{\quad 다 \quad}$

(가), (나), (다) 에 알맞은 것은?

① (가)∠A, (나)∠B , (다)C_1, C_2, C_3 은 한 점 P 에서 만난다.

② (가)∠B, (나)∠A, (다)C_1, C_2, C_3 은 한 점 P 에서 만난다.

③ (가)∠A, (나)∠B, (다)C_3 의 내부에 점 P 가 존재한다.

④ (가)∠B, (나)∠A, (다)C_3 의 내부에 점 P 가 존재한다.

⑤ (가)∠A, (나)∠B, (다)C_3 의 외부에 점 P 가 존재한다.

해설

□ADPF 에서 $\angle DPF + \angle A = 180°$

□BEPD 에서 $\angle DPE + \angle B = 180°$

따라서 $\angle DPF + \angle DPE = 360° - (\angle A + \angle B)$

$\angle FPE = \angle A + \angle B$

$\therefore\ \angle FPE + \angle C = 180°$

따라서 세 점 C, F, E 를 지나는 원을 C3 라 할 때,
세 원 C1, C2, C3는 한 점 P 에서 만난다.