1. x, y 에 대한 이차방정식 $x^2 + y^2 + ax - 2y = 0$ 이 중심이 $\mathrm{C}(1, 1)$ 인 원을 나타낼 때, 이 원의 반지름의길이는?

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ $\sqrt{2}$　④ $\sqrt{3}$　⑤ 2

해설

$x^2+y^2+ax-2y=0$ 을 표준형으로 고치면 $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{a^2+4}{4}$ 이므로

중심의 좌표는 $\mathrm{C}\left(-\frac{a}{2},\ 1\right)$

반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{a^2+4}}{2}$

$\therefore a=-2$

따라서 구하는 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$ 이다

2. 두 점 $\mathrm{A}(-5,\ 1)$, $\mathrm{B}(3,\ 7)$ 을 지름의 양끝으로 하는 원의 중심을 $(a,\ b)$, 반지름의 길이를 r 이라 할 때, $a+b+r$ 의 값은?

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

$\mathrm{A}(-5,\ 1)$ $\mathrm{B}(3,\ 7)$ 이 지름의 양끝이므로

$\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점은 중심의 좌표와 같다.

중점

$$\mathrm{M}=\left(\frac{-5+3}{2},\ \frac{1+7}{2}\right)=(-1,\ 4)=(a,\ b)$$

반지름

$$r=\sqrt{(-5+1)^2+(1-4)^2}=\sqrt{25}=5$$

$$\therefore\ a+b+r=-1+4+5=8$$

3. 세 점 $\mathrm{P}(-1, 4)$, $\mathrm{Q}(3, 6)$, $\mathrm{R}(0, -3)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle\mathrm{PQR}$ 의 외접원의 방정식은?

① $x^2 + y^2 - x - 2y - 3 = 0$

② $x^2 + y^2 + 2x - 1y - 10 = 0$

③ $x^2 + y^2 - 4x - 5y - 8 = 0$

④ $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$

⑤ $x^2 + y^2 - 6x - 5y - 20 = 0$

해설

구하는 원의 방정식을 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$
으로 놓으면 이 원이
세 점 $\mathrm{P}(-1, 4)$, $\mathrm{Q}(3, 6)$, $\mathrm{R}(0, -3)$ 을
지나므로 차례로 대입하면

$1 + 16 - A + 4B + C = 0 \quad \cdots$ ㉠

$9 + 36 + 3A + 6B + C = 0 \quad \cdots$ ㉡

$9 - 3B + C = 0 \quad \cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$A = -6, B = -2, C = -15$
따라서, 구하는 원의 방정식은
$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$

4. 이차방정식 $x^2 + y^2 + 2ax - 4ay + 6a^2 - a - 6 = 0$ 이 원의 방정식이 될 때 다음 중 a 가 가질 수 없는 정수 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$(x + a)^2 + (y - 2a)^2 = -(a^2 - a - 6)$

이것이 원을 나타내려면 $-(a^2 - a - 6) > 0$

즉 $a^2 - a - 6 < 0$

$\therefore\ -2 < a < 3$

5. 중심이 직선 $y = x + 3$ $(x > 0)$ 위에 있고, 점 $(1,\ 2)$를 지나며 또 x축에 접하는 원의 반지름은?

① 2　　② 5　　③ 10　　④ 12　　⑤ 15

해설

중심을 $(a,\ a+3)$ 이라 하면 반지름이
$a+3$ 이므로 원의 방정식은
$(x-a)^2 + (y-a-3)^2 = (a+3)^2$ ……㉠
㉠이 점 $(1,\ 2)$ 를 지나므로
$(1-a)^2 + (2-a-3)^2 = (a+3)^2 \Rightarrow a^2 - 6a - 7 = 0$
$\Rightarrow (a+1)(a-7) = 0$
$\Rightarrow a = 7 \quad (\because x > 0 \Rightarrow a > 0)$
$\therefore$ 반지름 : $a + 3 = 7 + 3 = 10$

6. 중심이 직선 $y=x+3$ 위에 있고 점 $(6,\ 2)$를 지나며, x 축에 접하는 원의 반지름 중 가장 작은 것은?

① 2 ② 5 ③ 7 ④ 14 ⑤ 17

해설

원의 중심을 $(a,\ a+3)$ 으로 놓으면 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y-a-3)^2=(a+3)^2$
이 원이 $(6,\ 2)$를 지나므로
$(6-a)^2+(a+1)^2=(a+3)^2$ 에서
$(a-2)(a-14)=0$
$\therefore a=2,\ 14$
원의 반지름중 작은 것은 $a+3=2+3=5$

7. 중심이 직선 $3x+y=12$ 의 제 1 사분면 위에 있고, x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 중심이 (a, b) 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

구하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면
중심의 좌표는 $(r,\ r)$ 이다.
따라서, 구하는 원의 방정식을
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ ······㉠
한편, 점 $(r,\ r)$ 는 직선 $3x+y=12$ 위에 있으므로 $3r+r=12$
$\therefore\ r=3$
따라서, 구하는 원의 방정식은 ㉠에서 $(x-3)^2+(y-3)^2=3^2$

8. 좌표평면 위의 두 점 A$(-1,\ 0)$, B$(1,\ 0)$ 까지의 거리의 비가 $1\ :\ 2$ 인 점 P$(x,\ y)$ 의 자취의 길이는?

① $\frac{5}{3}\pi$　② 2π　③ $\frac{8}{3}\pi$　④ 3π　⑤ $\frac{10}{3}\pi$

해설

좌표평면 위의 두 점 A$(-1,\ 0)$, B$(1,\ 0)$ 까지의 거리의 비가 $1\ :\ 2$ 인 점 P$(x,\ y)$ 의 자취는 $(-3, 0)$ 과 $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ 을 지름의 양 끝으로 하는 원이다.

즉 반지름이 $\frac{2}{3}$ 이 원의 둘레의 길이는 $\frac{8}{3}\pi$ 이다.

9. 두 원 $x^2 + y^2 - 2ay + 8a - 25 = 0$ 와 $x^2 + y^2 = 1$ 이 외접할 때 a 의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

두 원이 외접하면 중심 사이의 거리와 반지름의 합이 일치한다.

$\Rightarrow \quad x^2 + (y-a)^2 = a^2 - 8a + 25, \quad x^2 + y^2 = 1$

중심사이의 거리 : a

반지름의 합 : $1 + \sqrt{a^2 - 8a + 25}$

$\Rightarrow \quad a - 1 = \sqrt{a^2 - 8a + 25}$

$\Rightarrow \quad a = 4$

10. 원 $x^2 + y^2 - 2ax - 2y - 4 = 0$이 원 $x^2 + y^2 + 2x + 2ay - 2 = 0$의 둘레를 이등분하면서 지날 때, a의 값의 합은?

① -4　② -2　③ -1　④ 1　⑤ 2

해설

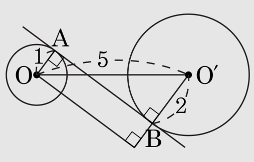
원 $x^2 + y^2 - 2ax - 2y - 4 = 0$이
원 $x^2 + y^2 + 2x + 2ay - 2 = 0$의 둘레를 이등분하려면
두 원의 공통현이
원$x^2 + y^2 + 2x - 2ay - 2 = 0$의 중심을 지나야 한다.
공통현의 방정식은
$(1 + a)x + (a + 1)y + 1 = 0 \cdots\cdots$ ㉠
㉠이 점 $(-1,\ -a)$를 지나므로
$(1 + a) \times (-1) + (a + 1) \times (-a) - 2 = 0$
$a^2 + 2a = 0$
$\therefore$ 근과 계수와의 관계에 의해 -2

11. 반지름의 길이가 각각 1, 2인 두 원 O, O′의 중심거리가 5일 때, 두 원의 공통내접선의 길이는?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

주어진 두 원의 그래프를 다음 그림과 같이 나타내면 $\overline{AB}$가 공통내접선이 된다.



점 O에서 선분 O′B의 연장선 위에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AO} = \overline{BH} = 1$

$\therefore \overline{O'H} = 1 + 2 = 3$

이때, 두 원의 중심거리가 5이므로

$\triangle OHO'$에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AB} = \overline{OH} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

12. 직선 $y = mx + 3$ 이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 와 서로 만나지 않을 때, m 값의 범위를 구하면?

① $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$　　② $-2\sqrt{2} \le m \le 2\sqrt{2}$

③ $-2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{3}$　　④ $m \le -2\sqrt{2},\ m \ge 2\sqrt{2}$

⑤ $m < -3\sqrt{2},\ m > 3\sqrt{2}$

해설

원과 직선이 서로 만나지 않으려면 원의 중심부터 직선까지 거리가 반지름보다 커야 한다.

$$\therefore \quad \frac{|m \times 0 + (-1) \times 0 + 3|}{\sqrt{m^2 + 1}} > 1$$

$$\Rightarrow \quad m^2 + 1 < 9$$

$$\Rightarrow \quad -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$$

13. 원 $x^2 + y^2 + 10x - 8y + 16 = 0$ 에 의하여 잘려지는 x축 위의 선분의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

x 축을 지나는 점은 $y = 0$ 이므로
$x^2 + 10x + 16 = 0 \Rightarrow (x+2)(x+8) = 0$
$\Rightarrow x = -2, \ -8$
$\therefore$ x 축 위의 교점 : $(-8, \ 0), \ (-2, \ 0)$
$\therefore$ 구하는 선분의 길이 : 6

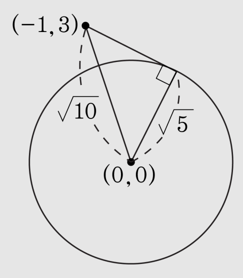
14. $x^2+y^2=5$ 밖의 한 점 $(-1,3)$ 에서 이 원에 접선을 그을 때, 점 $(-1,3)$ 에서 접점까지의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

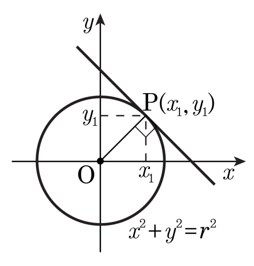
▷ 정답 : $\sqrt{5}$

해설

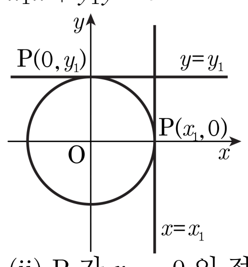
접선의 길이를 구하는 것이므로
$\sqrt{1^2+(-3)^2-5} = \sqrt{5}$



15. 다음은 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식이 $x_1x+y_1y=r^2$ 임을 보인 과정이다. (가) ~ (마) 에 들어갈 말로 옳지 <u>않은</u> 것은?



(i) P 가 $x_1 \neq 0$ 인 점이나 $y_1 \neq 0$ 인 점일 때, 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ 과 이 원의 중심 $\mathrm{O}(0,0)$ 을 지나는 직선 OP 의 기울기는 $\boxed{(가)}$ 이다. 그런데 점 P 에서의 접선은 직선 OP 와 수직이므로 점 P 에서의 접선의 방정식은 $\boxed{(나)}$
이 식을 정리하면
$x_1x+y_1y=x_1^2+y_1^2$ ⋯⋯ ㉠
한편, 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ 은 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점이므로
$\boxed{(다)}$ ⋯⋯ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은
$x_1x+y_1y=r^2$ ⋯⋯ ㉢



(ii) P 가 $x_1=0$ 인 점이나 $y_1=0$ 인 점일 때,
점 P 의 좌표가 $(0, y_1)$ 또는 $(x_1, 0)$ 이므로 접선의 방정식은 $\boxed{(라)}$ ⋯⋯ ㉢$'$ 또는 $\boxed{(마)}$ ⋯⋯ ㉢$''$ 이다. 이 때, $r=|y_1|$ 또는 $r=|x_1|$ 이므로
㉢$'$ 또는 ㉢$''$ 은 ㉢과 같은 식이다.
(i), (ii) 로부터 접선의 방정식은
$x_1x+y_1y=r^2$

① (가) : $\dfrac{y_1}{x_1}$

② (나) : $y-y_1=\dfrac{x_1}{y_1}(x-x_1)$

③ (다) : $x_1^2+y_1^2=r^2$

④ (라) : $y=y_1$

⑤ (마) : $x=x_1$

해설

② (나) : $y-y_1=-\dfrac{x_1}{y_1}(x-x_1)$

16. 원 $x^2+y^2=4^2$ 에 접하고, 기울기가 2 인 접선의 방정식이 $y=2x+a$ 일 때, a 의 값은?

① $\pm\sqrt{5}$ ② $\pm2\sqrt{5}$ ③ $\pm3\sqrt{5}$
④ $\pm4\sqrt{5}$ ⑤ $\pm5\sqrt{5}$

해설

기울기 m 일 때, 원의 접선 구하는 공식
$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}$ 에 의해
$y=2x\pm4\sqrt{1+2^2}$
$\therefore\ y=2x\pm4\sqrt{5}$

17. 점 $(1,\ 3)$에서 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 방정식을 $ax+by+c=0$이라 할 때, a^2+b^2 의 값을 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

점 $(1,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식의 기울기를 m이라 하면
$y=m(x-1)+3$
직선이 원에 접하므로 이 직선과 원의 중심 사이의 거리는 반지름과 같다.

$$\frac{|m\times 0+(-1)\times 0-m+3|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$$

$(-m+3)^2=5(m^2+1)$

방정식을 풀면, $m=-2,\ \frac{1}{2}$

$\therefore$ 직선의 방정식은 $2x+y-5=0,\ x-2y+5=0$

$\therefore\ a^2+b^2=5$

18. $(1,\ 2)$에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 접선 중 y축에 평행하지 않는 직선의 방정식은?

① $3x+4y+5=0$　　② $3x+4y-5=0$

③ $3x-4y+5=0$　　④ $3x-4y-5=0$

⑤ $3x+y+1=0$

해설

점$(1,2)$를 지나는 접선의 기울기를 m이라 하면

$y=m(x-1)+2 \quad \cdots$ ㉠

㉠과 원 중심사이 거리는 반지름과 같으므로

$$\frac{|-m+2|}{\sqrt{m^2+1}}=1$$

$(m-2)^2=m^2+1$

$m=\frac{3}{4}$

$\therefore$ 접선의 방정식은 $y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$, $3x-4y+5=0$

19. 점 A$(0,\ a)$에서 원 $x^2 + (y-3)^2 = 8$에 그은 두 접선이 서로 수직 일 때, 양수 a의 값은 ?

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 10

해설

점 A$(0,\ a)$을 지나고 기울기가 m인 접선을
$y = mx + a$로 놓으면 원의 중심 $(0,\ 3)$에서
접선 $mx - y + a = 0$ 까지의 거리는

$$\frac{|a-3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{2}$$

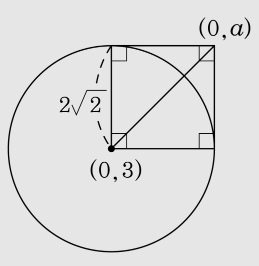
← 반지름 이 식의 양변을 제곱하면,
$(a-3)^2 = 8(m^2+1)$
$8m^2 - a^2 + 6a - 1 = 0$
m에 관한 이차방정식의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면,
두 접선이 직교하기 위해서는 $\alpha\beta = -1$ 이어야 하므로

$$\frac{-a^2 + 6a - 1}{8} = -1$$

$a^2 - 6a - 7 = 0,\quad (a-7)(a+1) = 0$
$\therefore\ a = 7\ (\because a > 0)$

해설

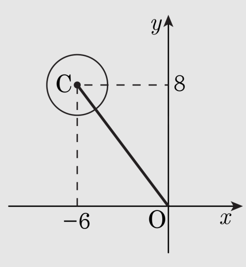
원의 중심 $(0,\ 3)$에서 A$(0,\ a)$까지의 거리는
반지름을 한 변으로 하는 정사각형의 대각선의 길이와 같다. $\sqrt{0 + (a-3)^2} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$
$a - 3 = \pm 4$
$\therefore\ a = 7$ 또는 $a = -1$
그런데 $a > 0$ 에서 $a = 7$



20. 원점에서 $x^2+y^2+12x-16y+96=0$ 위의 임의의 점까지의 거리의 최댓값과 최솟값의 합은?

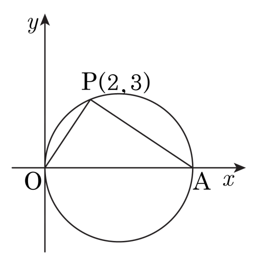
① 12 ② 16 ③ 20 ④ 24 ⑤ 28

해설



$x^2+y^2+12x-16y+96=0$을 변형하면
$(x+6)^2+(y-8)^2=4$이므로
이 원은 중심이 $\mathrm{C}(-6,8)$, 반지름의 길이가 2이다.
이 때, 원점 O에서 점 $\mathrm{C}(-6,8)$에 이르는 거리는
$\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{(-6)^2+8^2}=10$이므로
원점 O에서 원 위의 점에 이르는 거리의
최솟값은 $\overline{\mathrm{OC}}-2=10-2=8$이고,
최댓값은 $\overline{\mathrm{OC}}+2=10+2=12$
따라서, 최댓값과 최솟값의 합은 20이다.

21. 다음 그림과 같이 선분 OA 를 지름으로 하는 원 위에 한 점 P(2, 3) 이 있다. 이 때, 점 A 의 x 좌표를 구하면?



① $\frac{9}{2}$ ② $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}$
④ $\frac{15}{2}$ ⑤ $\frac{17}{2}$

해설

점 A 의 x 좌표를 a 라 하면
삼각형 OAP 가 직각삼각형이므로,
$a^2 = (2^2 + 3^2) + (a-2)^2 + 3^2$
$a^2 = a^2 - 4a + 26$
따라서 $a = \frac{13}{2}$

해설

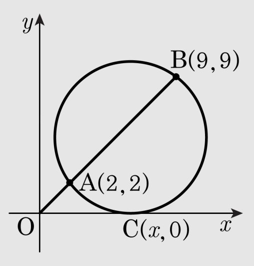
반원의 원주각은 90° 이므로 $\angle OPA = 90^\circ$
따라서, 직선 OP 와 직선 AP 의 기울기의 곱은 -1 이다.
점 A 좌표를 $(a,\ 0)$ 이라 하면
$\frac{3-0}{2-a} \times \frac{3}{2} = -1,\ 2a - 4 = 9$
따라서 $a = \frac{13}{2}$
A 의 x 좌표는 $\frac{13}{2}$ 이다.

22. 좌표평면 위의 두 점 $(2,\ 2)$, $(9,\ 9)$ 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x 좌표는 ?

① $\dfrac{9}{2}$ ② 5 ③ $\dfrac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\dfrac{13}{2}$

해설

그림에서 $\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$



$x^2 = \sqrt{2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{9^2 + 9^2} = 36 \quad x = 6$

23. 곡선 $(x-y+1)+m(x^2+y^2-1)=0$ 에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, m 은 임의의 상수)

(Ⅰ) 항상 $(0,\ 1)$과 $(-1,\ 0)$을 지난다. (Ⅱ) $x-y+1=0$과 $x^2+y^2=1$의 교점을 지나는 모든 원을 표시 할수 있다. (Ⅲ) 위의 곡선으로 표시 할 수 있는 유일한 직선은 $y=x+1$이다.

① Ⅰ　② Ⅱ　③ Ⅲ
④ Ⅰ, Ⅱ　⑤ Ⅰ, Ⅲ

해설

준 식은 $x^2+y^2-1=0$ 과 $x-y+1=0$ 의 교점을 지나는 도형의 방정식이다.
$m=0$ 일 때만 $x-y+1=0$ 이 되어 직선을 나타내며, 그 외에는 항상 원을 나타낸다.
단, m 의 값이 어떤 실수로 주어져도 $x^2+y^2-1=0$ 인 원은 나타낼 수 없다.

24. $A(1,\ 5)$, $B(7,\ -1)$, $P(x,\ y)$ 에 대하여 $\overline{AP} \perp \overline{BP}$ 임을 만족하는 자취 방정식은?

① $x^2 + y^2 = 1$　　② $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$

③ $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 10$　　④ $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 12$

⑤ $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 18$

해설

$\overline{AP}$ 의 기울기 : $\dfrac{y-5}{x-1}$

$\overline{BP}$ 의 기울기 : $\dfrac{y+1}{x-7}$

두 직선이 수직하면 기울기의 곱이 -1 이다.

$\Rightarrow \quad \dfrac{y-5}{x-1} \times \dfrac{y+1}{x-7} = -1$

$\Rightarrow \quad y^2 - 4y - 5 = -x^2 + 8x - 7$

$\Rightarrow \quad (x-4)^2 + (y-2)^2 = 18$

25. 두 원 $x^2 + y^2 - 2 = 0$, $x^2 + y^2 + kx - 4y - 1 = 0$ 의 교점을 지나는 직선이 $x + 2y + 1 = 0$ 과 평행일 때, k 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -2$

해설

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2 + y^2 - 2 - (x^2 + y^2 + kx - 4y - 1) = 0$

$\therefore kx - 4y + 1 = 0$

이 직선이 직선 $x + 2y + 1 = 0$ 과 평행하므로

$\frac{k}{1} = \frac{-4}{2} \neq \frac{1}{1}$

$\therefore\ k = -2$

26. 두 원 $(x-a)^2+(y-2)^2=9$, $(x-1)^2+(y+a)^2=1$이 직교하도록 하는 a의 값의 곱을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $-\frac{5}{2}$

해설

두 원의 중심이 각각 $(a,\ 2)$, $(1,\ -a)$이므로
두 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(a-1)^2+(2+a)^2}$이다.
두 원의 반지름은 각각 3, 1이므로
직교하기 위한 조건은
$(a-1)^2+(2+a)^2=3^2+1^2$
$\therefore\ 2a^2+2a-5=0$
근과 계수와의 관계로부터 두 근의 곱은 $-\frac{5}{2}$

27. 원 $x^2 + y^2 - 6ax + 2ay + 20a - 10 = 0$ 은 정수 a 의 값에 관계없이 정점을 지난다. 그 정점을 구하면?

① $(2,\ -1)$　② $(3,\ -2)$　③ $(2,\ -2)$
④ $(-1,\ -2)$　⑤ $(3,\ -1)$

해설

a 에 대한 항등식 꼴로 나타내면
$a(-6x + 2y + 20) + (x^2 + y^2 - 10) = 0$

$$\begin{cases} -6x + 2y + 20 = 0 \rightarrow y = 3x - 10 \cdots ① \\ x^2 + y^2 = 10 \cdots ② \end{cases}$$

①, ②를 연립하면
$x^2 + (3x - 10)^2 = 10$
$x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow (x - 3)^2 = 0$
$\therefore\ x = 3,\ y = -1$

28. $y = x + k$ 가 원 $x^2 + y^2 + 6y - 16 = 0$ 에 의해서 잘린 현의 길이가 8 일 때, 상수 k 값의 합은 ?

① 6 ② 9 ③ −6 ④ −9 ⑤ 4

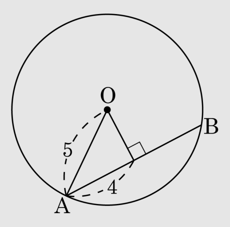
해설

$$\begin{cases} y = x + k \cdots ㉠ \\ x^2 + (y+3)^2 = 25 \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠, ㉡의 교점을 A, B 라 하면

$\overline{\mathrm{AB}} = 8$, $\overline{\mathrm{OA}} = 5$ 이므로

점 O 에서 ㉠에 이르는 거리는 3 이다.



$\dfrac{|3+k|}{\sqrt{1+1}} = 3, \quad k^2 + 6k - 9 = 0$

k 값의 합 $\Rightarrow \; -6$

29. 반지름의 길이가 10, 중심좌표가 $\mathrm{O}(0,\ 0)$인 원 밖의 한 점 $\mathrm{P}(11,\ 12)$에서 이 원에 그은 두 접선의 접점을 지나는 직선을 극선이라고 한다. 이 극선의 방정식이 $px+qy=100$일 때, $p+q$를 구하여라.

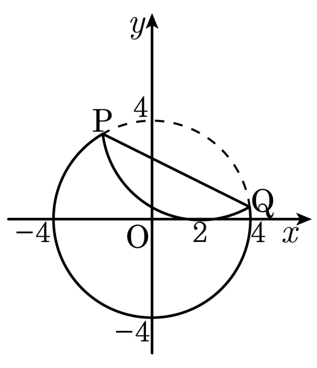
▶ 답 :

▷ 정답 : 23

해설

원 위의 두 접점을 $\mathrm{Q}_1(a_1, b_1)$, $\mathrm{Q}_2(a_2, b_2)$라 하면
각각의 접선의 방정식은 $a_1x+b_1y=100,\ a_2x+b_2y=100$이고
두 직선은 동시에 $\mathrm{P}(11,\ 12)$를 지나므로
$11a_1+12b_1=100,\ 11a_2+12b_2=100$이 함께 성립한다.
이것은 $11x+12y=100$ 위에 두 점 $\mathrm{Q}_1(a_1, b_1)$,
$\mathrm{Q}_2(a_2, b_2)$가 동시에 있는 것을 의미하므로
직선 $\mathrm{Q}_1,\ \mathrm{Q}_2$의 방정식은
$11x+12y=100$이다.
따라서 $p=11,\ q=12 \quad \therefore\ p+q=23$

30. 다음 그림과 같이 원 $x^2 + y^2 = 16$을 점 $(2, 0)$에서 x축과 접하도록 접었을 때, 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x절편을 구하여라.

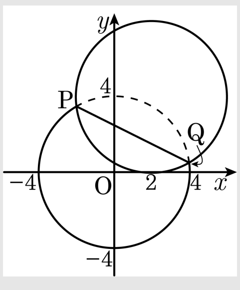


▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

호 PQ는 그림과 같이 점 $(2, 0)$에서 x과 접하고 반지름의 길이가 4인 원의 일부이므로 원의 방정식은 $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 16$//



이때 선분 PQ는 두 원 $x^2 + y^2 = 16$, $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 16$의 공통현이므로 직선 PQ의 방정식은

$x^2 + y^2 - 16 - \{(x-2)^2 + (y-4)^2 - 16\} = 0$

$\therefore x + 2y - 5 = 0$

따라서 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x절편은 5이다.