**1.** 두 원 $x^2+y^2=1$, $(x-3)^2+(y+4)^2=r^2$ 의 공통접선이 모두 4 개가 되도록 하는 자연수 $r$ 의 개수는?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

**해설**

두 원의 공통접선이 4 개가 되려면 두 원의 위치 관계는 서로 다른 원의 외부에 있어야 한다.
이 때, $x^2+y^2=1$ 은 중심이 $(0,0)$ ,
반지름의 길이가 1 인 원이고
$(x-3)^2+(y+4)^2=r^2$ 은 중심이 $(3,-4)$ ,
반지름의 길이가 $r$ 인 원이므로
$\sqrt{3^2+(-4)^2} > 1+r$
$5 > 1+r$
$\therefore 0 < r < 4$
따라서, 자연수 $r$ 은 $1,2,3$ 으로 모두 3 개이다.

**2.** 직선 $y = x + n$ 과 원 $x^2 + y^2 = 8$ 이 만나지 않도록 하는 자연수 $n$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답：

▷ 정답： 5

해설

점 $(0,\ 0)$ 에서 직선 $y = x + n$ 까지의 거리가 반지름의 길이 $2\sqrt{2}$ 보다 크면 된다.

$\frac{|n|}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{2}$

$\therefore\ n > 4$ ($\because n$ 은 자연수)

$\therefore$ 최소의 $n$ 은 5 이다.

**3.** 원 $x^2 + y^2 = 2$ 와 직선 $y = -x + k$ 이 한점에서 만나도록 하는 $k$ 값은?(단, $k < 0$ )

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -2$

해설

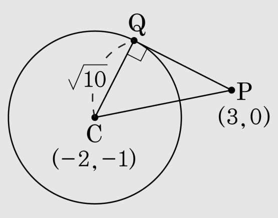
원이 직선과 한 점에서 만나려면,
즉 접하려면 원의 중심과 직선사이 거리가
반지름과 같아야 한다.
$\Rightarrow$ 중심 : $(0, 0)$ 직선 : $x + y - k = 0$
$\dfrac{|1 \times 0 + 1 \times 0 - k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$
$\Rightarrow k = \pm 2$
$\therefore k = -2$ ($\because k < 0$)

**4.** 점 $\mathrm{P}\,(3, 0)$ 에서 원 $(x+2)^2+(y+1)^2=10$ 에 그은 접선의 길이는?

① $\sqrt{5}$　② $\sqrt{10}$　③ $4$　④ $2\sqrt{5}$　⑤ $5$

해설

원의 중심을 C 라 하면 $\mathrm{C}\,(-2, -1)$ 이므로




$\overline{\mathrm{CP}} = \sqrt{(3+2)^2+(0+1)^2} = \sqrt{26}$

$\overline{\mathrm{CQ}} = \sqrt{10}$

따라서, $\triangle\mathrm{CPQ}$ 는 $\overline{\mathrm{CP}}$ 가 빗변인 직각 삼각형이므로

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{\overline{\mathrm{CP}}^2 - \overline{\mathrm{CQ}}^2} = \sqrt{26-10} = 4$

**5.** 원 $x^2+y^2=4$ 에 접하고 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$ 에 수직인 직선의 $y$ 절편은?

① $\pm\sqrt{2}$ ② $\pm\sqrt{3}$ ③ $\pm\sqrt{5}$

④ $\pm2\sqrt{3}$ ⑤ $\pm2\sqrt{5}$

해설

직선 $y=\frac{1}{2}x+1$ 에 수직인 직선의 기울기는 $-2$

원 $x^2+y^2=4$ 에 접하는 기울기가 $-2$ 인

직선의 방정식은 $y=-2x\pm2\sqrt{(-2)^2+1}$

$\therefore\ y=-2x\pm2\sqrt{5}$

따라서 구하는 직선의 $y$ 절편은 $\pm2\sqrt{5}$

**6.** 다음 중 옳은 것은?

① $(A-B)\cup(A-C)=A-(B\cup C)$

② $(A-B)\cup(B-A)=\varnothing$이면 $A\subset B$

③ $(A-B)^c=A^c\cup B$

④ $A\subset B$이면 $(A^c\cup B^c)\cap(A\cup B)=A\cap B^c$

⑤ $(A^c-B^c)^c=A-B$

해설

① $(A-B)\cup(A-C)=\left(A\cap B^C\right)\cup(A\cap C^c)=A\cap(B^c\cup C^c)=A\cap(B\cap C)^c=A-(B\cap C)$

② $A=B$

③ $(A-B)^c=(A\cap B^c)^c=A^c\cup B$

④ $A\subset B$ 이면, $(A^c\cup B^c)\cap(A\cup B)=(A\cap B)^c\cap(A\cup B)=A^c\cap B$

⑤ $(A^c-B^c)^c=(A^c\cap B)^c=A\cup B^c$

**7.** 다음은 실수 $x,\ y,\ z$ 에 대하여 $x^2+y^2+z^2$ 와 $xy+yz+zx$ 의 대소를 비교한 것이다. [가], [나] 에 알맞은 내용을 차례로 나열한 것은?

$$x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)$$
$$=\frac{1}{2}\{2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx\}$$
$$=\frac{1}{2}(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}\ (\text{[가]})0 \text{ 이므로}$$
$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx \ (\text{단, 등호는 ( [나] ) 일 때 성립})$$

① $<,\ x=y=z$
② $\leq,\ x=y=z$
③ $\geq,\ x=y=z$
④ $<,\ xy=yz=zx$
⑤ $\leq,\ xy=yz=zx$

해설

$$x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)$$
$$=\frac{1}{2}\{2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx\}$$
$$=\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}\geq 0 \text{ 이므로}$$
$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx \ (\text{단, 등호는 } x=y=z \text{ 일 때 성립})$$

**8.** 집합 $A = \{x \mid x$는 10 미만의 홀수$\}$ 의 부분집합을 $B$ 라고 할 때, $n(B) = 3$ 인 집합 $B$ 의 개수는?

① 6 개 ② 7 개 ③ 8 개 ④ 9 개 ⑤ 10 개

해설

집합 $B$는 집합 $A$의 부분집합 중 그 원소의 개수가 3 개인 집합이다.
$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$이므로 원소가 3 개인 집합 $A$의 부분집합은 $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 3, 7\}$, $\{1, 3, 9\}$, $\{1, 5, 7\}$, $\{1, 5, 9\}$, $\{1, 7, 9\}$, $\{3, 5, 7\}$, $\{3, 5, 9\}$, $\{3, 7, 9\}$, $\{5, 7, 9\}$이므로 모두 10 개이다.

**9.** 두 집합 $A$, $B$ 에 대하여 $A \subset B$, $A \neq B$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $n(A) < n(B)$

② $B = \{1,\ 2,\ 3\}$ 일 때, 집합 $A$ 의 개수는 8개이다.

③ $n(B) = 3$ 이면 $n(A) = 1$ 이다.

④ $n(A) + 2 = n(B)$

⑤ $n(A) = n(B)$

해설

① $A$ 는 $B$ 의 진부분집합이므로 $n(B) \geq n(A) + 1$ 이다. 따라서 $n(A) < n(B)$가 된다.
② $B = \{1,\ 2,\ 3\}$ 일 때, 집합 $A$ 의 개수는 자기 자신을 제외해야 하므로 7개이다.
③ $A$ 는 $B$ 의 진부분집합이므로 $n(B) = 3$ 이면 $n(A) \leq 2$ 이다.
④, ⑤ $A$ 는 $B$ 의 진부분집합이므로 $n(B) > n(A)$ 이다.

**10.** 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면?

① $A \subset B$ 이면 $A \cap B = A$ 이다.

② $A \subset B$ 이면 $A^c \subset B^c$ 이다.

③ $B - A = B \cap A^c$

④ $A \cap \varnothing^c = A$

⑤ $U - \varnothing = A \cap A^c$

**해설**

② $A \subset B$ 이면 $A^c \supset B^c$ 이다.
④ $A \cap \varnothing^c = A \cap U = A$
⑤ $U - \varnothing = U = A \cup A^c$

**11.** 두 집합 $A$, $B$에 대하여 $n(A-B)=20$, $n(A^c\cap B)=12$, $n(A\cup B)=48$일 때, $n(A\cap B)$를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$A^c\cap B=B-A$

$n(A\cup B)=n(A-B)+n(A\cap B)+n(A^c\cap B)$

$48=20+n(A\cap B)+12$

$\therefore\ n(A\cap B)=16$

**12.** 실수 $x$에 대하여 두 조건 $p$ : $a \le x \le 1$, $q$ : $x \ge -1$이 있다. 명제 $p \to q$를 참이 되게 하는 상수 $a$의 범위는?

① $a > 1$　　② $a \le 1$　　③ $-1 \le a \le 1$

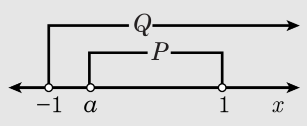
④ $a \ge -1$　　⑤ $a \le -1$

해설

조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라 하자.

( i ) $a > 1$일 때, $P = \varnothing$ 이므로 $P \subset Q$ $\therefore$ $a > 1$

( ii ) $a \le 1$ 일 때, 수직선에 나타내면




$\therefore$ $-1 \le a \le 1$

( i ), ( ii )에서 $a \ge -1$

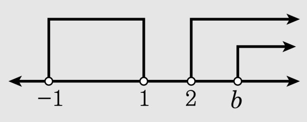
**13.** $-1 < x < 1$ 또는 $x > 2$ 이 되기 위한 $x > a$은 필요조건이고 $x > b$는 충분조건일 때 $a$ 의 최댓값과 $b$의 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

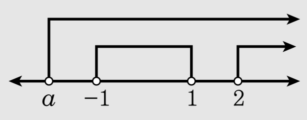
해설

$x > b$ 은 $-1 < x < 1$ 또는 $x > 2$ 이 되기 위한 충분조건에서




$\therefore b \geq 2$

$x > a$ 은 $-1 < x < 1$ 또는 $x > 2$ 이 되기 위한 필요조건에서




$\therefore a \leq -1$

$\therefore a$ 의 최댓값 : -1, $b$ 의 최솟값 : 2

따라서 $(-1) + 2 = 1$

**14.** $x, y, z$ 는 양수일 때, 다음 식을 간단히 하면?

$$\frac{(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1})\{(xy)^{-1}+(yz)^{-1}+(zx)^{-1}\}}{(x+y+z)(xy+yz+zx)}$$

① $x^{-2}y^{-2}z^{-2}$
② $x^{-2}+y^{-2}+z^{-2}$
③ $(x+y+z)^{-2}$
④ $\dfrac{1}{xyz}$
⑤ $\dfrac{1}{xy+yz+zx}$

해설

$$\frac{1}{x+y+z}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{xy+yz+zx}\right)$$
$$\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)$$
$$=\frac{1}{x+y+z}\left(\frac{xy+yz+zx}{xyz}\right)\left(\frac{1}{xy+yz+zx}\right)$$
$$\left(\frac{x+y+z}{xyz}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{xyz}\right)^2=x^{-2}y^{-2}z^{-2}$$

**15.** $a+b+c=0$일 때, $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$의 값을 구하라.

▶ 답:

▷ 정답: $-3$

해설

(주어진 식)

$=\frac{a(b+c)}{bc}+\frac{b(c+a)}{ca}+\frac{c(a+b)}{ab}$

$=\frac{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)}{abc}$

$=\frac{(b+c)^3+b^2(-b)+c^2(-c)}{-(b+c)bc}$

$=\frac{(b+c)^3-(b^3+c^3)}{-(b+c)bc}$

$=\frac{3bc(b+c)}{-(b+c)bc}=-3$

**16.** $x = \sqrt{\sqrt{49} - \sqrt{48}}$ 일 때, $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + x + 1$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\sqrt{49} - \sqrt{48}} = \sqrt{7 - 2\sqrt{12}} \\ &= \sqrt{(4+3) - 2\sqrt{4 \times 3}} \\ &= \sqrt{4} - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

$x = 2 - \sqrt{3}$ 에서 $(x-2)^2 = (-\sqrt{3})^2$

$x^2 - 4x + 4 = 3$

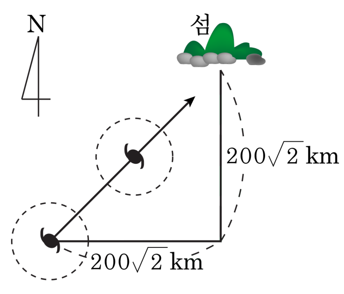
$\therefore\ x^2 - 4x + 1 = 0$

$x^4 - 3x^3 - 3x^2 + x + 1$

$= x^2(x^2 - 4x + 1) + x^3 - 4x^2 + x + 1$

$= x^3 - 4x^2 + x + 1 = x(x^2 - 4x + 1) + 1 = 1$

**17.** 반지름의 길이가 10 km 인 원 모양의 섬이 있다. 현재 태풍의 중심은 이 섬의 중심으로부터 남쪽으로 $200\sqrt{2}$ km, 서쪽으로 $200\sqrt{2}$ km 떨어진 곳에서 시속 10 km 의 속력으로 북동쪽으로 진행하고 있다. 태풍의 중심에서 30 km 이내가 폭풍우권이라고 할 때, 처음으로 이 섬 전체가 폭풍우권에 들어가는데 걸리는 시간은 몇 시간인지 구하면?(단, 폭풍우권의 크기는 일정하다.)

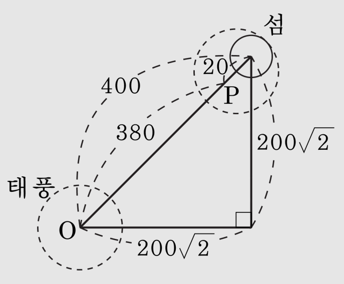



▶ 답 : ______ 시간

▷ 정답 : 38 시간

해설

태풍이 O 에서 출발하여 P 지점에 도착하면
섬 전체가 폭풍우권에 들어간다.
$\overline{OP} = 380(\text{km})$ 이므로 걸리는 시간은 38 시간



**18.** 자연수 전체의 집합의 부분집합 $A$에 대하여 다음을 만족하는 집합 $A$의 개수는? (단, $A \neq \phi$ )

| |
|---|
| $x \in A$이면 $\dfrac{81}{x} \in A$ |

① 5개 ② 6개 ③ 7개 ④ 8개 ⑤ 9개

해설

$A$ 는 81의 약수를 원소로 하는 집합인데
$n(A)=1$인 경우는 $\{9\}$ 1개
$n(A)=2$인 경우는 $\{1,\ 81\}$, $\{3,\ 27\}$ 2개
$n(A)=3$인 경우는 $\{1,\ 9,\ 81\}$, $\{3,\ 9,\ 27\}$ 2개
$n(A)=4$인 경우는 $\{1,\ 3,\ 27, 81\}$ 1개
$n(A)=5$인 경우는 $\{1,\ 3,\ 9, 27, 81\}$ 1개
$\therefore$ 7 개

**19.** 집합 $A = \{\varnothing,\ 0,\ 1,\ \{0\},\ \{1\}\}$ 일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\varnothing \in A$　　② $\varnothing \subset A$　　③ $\{\varnothing\} \subset A$

④ $\{0,\ 1\} \in A$　　⑤ $\{\{0\},\ 0\} \subset A$

해설

① 집합 $A$ 에 속에 있는 $\varnothing$ 은 집합 $A$ 의 원소이다.

② 공집합 $\varnothing$ 는 모든 집합의 부분집합이다.

③ $\{\varnothing\} \subset A$

④ $\{0,\ 1\} \subset A$

**20.** 두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$ , $B=\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 에 대하여$A\times B=\{(a,\ b)|a\in A,\ b\in B\}$ 로 정의할 때, $(A\times B)\cup(B\times A)$ 의 원소의 개수는?

① 12 개　② 16 개　③ 20 개　④ 24 개　⑤ 28 개

해설

$A\times B$는 $a\in A,\ b\in B$인 모든 순서쌍 $(a,\ b)$로 이루어지므로

$A\times B=\{(1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (1,5),\ (2,2),\ (2,3),\ (2,4),\ (2,5),\ (3,2),\ (3,3),\ (3,4),\ (3,5)\}$

$B\times A=\{(2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (3,1),\ (3,2),\ (3,3),\ (4,1),\ (4,2),\ (4,3),\ (5,1),\ (5,2),\ (5,3)\}$

$(A\times B)\cap(B\times A)=\{(2,2),\ (2,3),\ (3,2),\ (3,3)\}$

따라서, $n(A\times B)=12,\ n(B\times A)=12,\ n((A\times B)\cap(B\times A))=4$ 이므로

$n((A\times B)\cup(B\times A))=n(A\times B)+n(B\times A)-n((A\times B)\cap(B\times A))$
$=12+12-4=20$

**21.** 임의의 양의 실수 $x$에 대하여, $x$를 넘지 않는소수의 개수를 $f(x)$라 하자. 예를 들면 $f\left(\frac{5}{2}\right) = 1$, $f(5) = 3$ 이다.<보기> 중 옳은 것을 모두 고르면?

<보기>

㉠ $f(10) = 4$

㉡ 임의의 실수 $x$에 대하여 $f(x) < x$ 이다.

㉢ 임의의 양의 실수 $x$에 대하여 $f(x+1) = f(x)$ 이다.

① ㉠　　② ㉠, ㉡　　③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

10 이하의 소수는 $2, 3, 5, 7$ 이므로 $f(10) = 4$
㉡ $f(x) < [x] \leq x$ 이므로 $f(x) < x$
㉢ $x = 2$ 인 경우 $f(3) = 2, f(2) = 1$ 이므로 $f(3) \neq f(2)$
따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡이다.

**22.** 함수 $f(x) = [x[x]]$ 에 대한 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $[x]$ 는 $x$ 보다 크지 않은 최대의 정수)

보기

㉠ $f(x) = -1$ 이 되는 $x$ 는 존재하지 않는다.

㉡ 자연수 $n$ 에 대해서 집합 $\{f(x) \mid n \le x < n+1\}$ 의 원소의 개수는$n$ 개이다.

㉢ 자연수 $n$ 에 대해서 집합 $\{f(x) \mid -n \le x < -n+1\}$ 의 원소의 개수는 $n+1$ 개이다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $x \ge 0$ 이면 $[x] \ge 0$ 이므로 $x[x] \ge 0$
$x < 0$ 이면 $[x] < 0$ 이므로 $x[x] > 0$
그러므로 모든 $x$ 에 대하여 $f(x) = [x[x]]$ 이므로
$f(x) = -1$ 은 존재하지 않는다. (참)

㉡ 자연수 $n$ 에 대하여 $n \le x < n+1$ 이면 $[x] = n$ 이므로
$f(x) = [nx]$
$n^2 \le nx < n^2 + n$ 이고 $[nx]$ 는 정수이므로
$f(x)$ 의 원소의 개수는 $n^2,\ n^2+1,\ \cdots,\ n^2+(n-1)$ 로서
모두 $n$ 개이다. (참)

㉢ 자연수 $n$ 에 대하여 $-n \le x < n+1$ 이면 $[x] = -n$ 이므로
각 변에 $-n$ 을 곱하면, $f(x) = [-nx]$ 이고 $n^2 - n < -nx \le n^2$
따라서 $f(x)$ 의 원소의 개수는
$n^2 - n, (n^2 - n) + 1, \cdots, (n^2 - n) + (n-1), (n^2 - n) + n$
로서 모두 $n+1$ 개 이다. (참)

**23.** 함수 $y = \dfrac{2x-1}{x+2}$ 에 관한 설명 중 틀린 것을 고르면?

① 점근선 중 하나는 $x = -2$ 이다.

② 점근선 중 하나는 $y = 2$ 이다.

③ 함수 $y = \dfrac{2}{x} + 2$ 의 그래프를 $x$ 축 방향으로 $-5$만큼 평행이동한 그래프다.

④ 이 그래프는 $x$축을 지난다.

⑤ 함수 $y = \dfrac{-5}{x+2}$ 의 그래프를 $y$ 축 방향으로 2 만큼 평행이동한 그래프다.

**해설**

$y = \dfrac{2x-1}{x+2} = \dfrac{2(x+2)-5}{x+2} = \dfrac{-5}{x+2} + 2$

그러므로 함수의 점근선은 $x = -2,\ y = 2$이고

$y = \dfrac{-5}{x}$ 의 그래프를 $x$축 방향으로 $-2$만큼,

$y$축 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이다.

따라서 설명 중 틀린 것은 ③이다.

**24.** $x^2 + \frac{1}{x^2} = 8$ 일 때, $x^2 + \sqrt{6}x$ 의 값은? (단, $0 < x < 1$ )

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 + \frac{1}{x^2} = 8$ 의 양변에 $x^2$ 을 곱하고 정리하면

$(x^2)^2 - 8x^2 + 1 = 0$

근의 공식으로 풀면

$x^2 = 4 - \sqrt{15}$ ($\because$ $0 < x < 1$) ⋯ ①

$x = \sqrt{4 - \sqrt{15}}$ ($\because$ $0 < x$)

$= \sqrt{\frac{8 - 2\sqrt{15}}{2}} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ ⋯ ②

①, ②에 따라

$x^2 + \sqrt{6}x$

$= (4 - \sqrt{15}) + \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

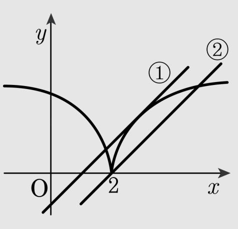
$= 4 - \sqrt{15} + \sqrt{15} - 3 = 1$

**25.** $y = \sqrt{|x-2|}$ 와 $y = x+k$ 가 서로 다른 세 점에서 만날 때의 $k$값의 범위를 구하면?

① $-2 < k < -\frac{7}{4}$　② $-2 < k \le -\frac{7}{4}$　③ $-2 \le k < -\frac{7}{4}$
④ $-2 \le k \le -\frac{7}{4}$　⑤ $k < -\frac{7}{4}$

해설

$y = \sqrt{|x-2|}$의 개형은




와 같고

$y = x+k$ 가 그림의 ①, ② 사이에 있으면 된다.

① $y = \sqrt{x-2}$ 와 $y = x+k$ 가 접할 때,

$x+k = \sqrt{x-2}$에서

$x^2 + (2k-1)x + k^2 + 2 = 0$

$D = (2k-1)^2 - 4k^2 - 8 = 0$

$\therefore\ k = -\frac{7}{4}$

② $y = x+k$ 가 $(2, 0)$ 을 지날 때

$0 = 2+k$

$k = -2$

$\therefore -2 < k < -\frac{7}{4}$