1. 두 원 $x^2+y^2=1$, $(x-3)^2+(y+4)^2=r^2$ 의 공통접선이 모두 4 개가 되도록 하는 자연수 r 의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

두 원의 공통접선이 4 개가 되려면 두 원의 위치 관계는 서로 다른 원의 외부에 있어야 한다.

이 때, $x^2+y^2=1$ 은 중심이 $(0,0)$,

반지름의 길이가 1 인 원이고

$(x-3)^2+(y+4)^2=r^2$ 은 중심이 $(3,-4)$,

반지름의 길이가 r 인 원이므로

$\sqrt{3^2+(-4)^2}>1+r$

$5>1+r$

$\therefore 0<r<4$

따라서, 자연수 r 은 $1,2,3$ 으로 모두 3개이다.

2. 직선 $y = x + n$ 과 원 $x^2 + y^2 = 8$ 이 만나지 않도록 하는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 5

해설

점 $(0,\ 0)$ 에서 직선 $y = x + n$ 까지의 거리가 반지름의 길이 $2\sqrt{2}$ 보다 크면 된다.

$$\frac{|n|}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{2}$$

$\therefore\ n > 4$ ($\because$ n 은 자연수)

$\therefore$ 최소의 n 은 5 이다.

3. 원 $x^2 + y^2 = 2$ 와 직선 $y = -x + k$ 이 한점에서 만나도록 하는 k 값은?(단, $k < 0$)

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $k = -2$

해설

원이 직선과 한 점에서 만나려면,
즉 접하려면 원의 중심과 직선사이 거리가 반지름과 같아야 한다.

$\Rightarrow$ 중심 : $(0,\ 0)$ 직선 : $x + y - k = 0$

$$\frac{|1 \times 0 + 1 \times 0 - k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$$

$\Rightarrow\ k = \pm 2$

$\therefore\ k = -2\ (\because\ k < 0)$

4. 점 P$(3,0)$ 에서 원 $(x+2)^2+(y+1)^2=10$ 에 그은 접선의 길이는?

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{10}$ ③ 4 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ 5

해설

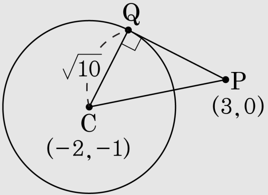
원의 중심을 C 라 하면 C$(-2,-1)$ 이므로

$\overline{CP}=\sqrt{(3+2)^2+(0+1)^2}=\sqrt{26}$

$\overline{CQ}=\sqrt{10}$

따라서, $\triangle CPQ$ 는 $\overline{CP}$ 가 빗변인 직각삼각형이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{CP}^2-\overline{CQ}^2}=\sqrt{26-10}=4$



5. 원 $x^2+y^2=4$ 에 접하고 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$ 에 수직인 직선의 y 절편은?

① $\pm\sqrt{2}$ ② $\pm\sqrt{3}$ ③ $\pm\sqrt{5}$

④ $\pm2\sqrt{3}$ ⑤ $\pm2\sqrt{5}$

해설

직선 $y=\frac{1}{2}x+1$ 에 수직인 직선의 기울기는 -2

원 $x^2+y^2=4$ 에 접하는 기울기가 -2 인

직선의 방정식은 $y=-2x\pm2\sqrt{(-2)^2+1}$

$\therefore\ y=-2x\pm2\sqrt{5}$

따라서 구하는 직선의 y 절편은 $\pm2\sqrt{5}$

6. 다음 중 옳은 것은?

① $(A-B)\cup(A-C)=A-(B\cup C)$

② $(A-B)\cup(B-A)=\varnothing$이면 $A\subset B$

③ $(A-B)^c=A^c\cup B$

④ $A\subset B$이면 $(A^c\cup B^c)\cap(A\cup B)=A\cap B^c$

⑤ $(A^c-B^c)^c=A-B$

해설

① $(A-B)\cup(A-C)=\left(A\cap B^C\right)\cup(A\cap C^c)=A\cap(B^c\cup C^c)=A\cap(B\cap C)^c=A-(B\cap C)$

② $A=B$

③ $(A-B)^c=(A\cap B^c)^c=A^c\cup B$

④ $A\subset B$ 이면, $(A^c\cup B^c)\cap(A\cup B)=(A\cap B)^c\cap(A\cup B)=A^c\cap B$

⑤ $(A^c-B^c)^c=(A^c\cap B)^c=A\cup B^c$

7. 다음은 실수 x, y, z 에 대하여 $x^2+y^2+z^2$ 와 $xy+yz+zx$ 의 대소를 비교한 것이다. [가], [나]에 알맞은 내용을 차례로 나열한 것은?

$x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)$
$=\frac{1}{2}\{2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx\}$
$=\frac{1}{2}(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$ ([가])0 이므로
$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ (단, 등호는 ([나]) 일 때 성립)

① $<, x=y=z$ ② $\leq, x=y=z$
③ $\geq, x=y=z$ ④ $<, xy=yz=zx$
⑤ $\leq, xy=yz=zx$

해설

$x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)$

$=\frac{1}{2}\{2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx\}$

$=\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\} \geq 0$ 이므로

$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ (단, 등호는 $x=y=z$ 일 때 성립)

8. 집합 $A = \{x \mid x$는 10 미만의 홀수$\}$ 의 부분집합을 B 라고 할 때, $n(B) = 3$ 인 집합 B 의 개수는?

① 6 개 ② 7 개 ③ 8 개 ④ 9 개 ⑤ 10 개

해설

집합 B는 집합 A의 부분집합 중 그 원소의 개수가 3 개 인 집합이다.

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$이므로 원소가 3 개 인 집합 A의 부분집합은 $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 3, 7\}$, $\{1, 3, 9\}$, $\{1, 5, 7\}$, $\{1, 5, 9\}$, $\{1, 7, 9\}$, $\{3, 5, 7\}$, $\{3, 5, 9\}$, $\{3, 7, 9\}$, $\{5, 7, 9\}$이므로 모두 10 개이다.

9. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \subset B$, $A \neq B$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $n(A) < n(B)$

② $B = \{1,\ 2,\ 3\}$ 일 때, 집합 A 의 개수는 8개이다.

③ $n(B) = 3$ 이면 $n(A) = 1$ 이다.

④ $n(A) + 2 = n(B)$

⑤ $n(A) = n(B)$

해설

① A 는 B 의 진부분집합이므로 $n(B) \geq n(A) + 1$ 이다. 따라서 $n(A) < n(B)$ 가 된다.

② $B = \{1,\ 2,\ 3\}$ 일 때, 집합 A 의 개수는 자기 자신을 제외해야 하므로 7개이다.

③ A 는 B 의 진부분집합이므로 $n(B) = 3$ 이면 $n(A) \leq 2$ 이다.

④, ⑤ A 는 B 의 진부분집합이므로 $n(B) > n(A)$ 이다.

10. 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① $A \subset B$ 이면 $A \cap B = A$ 이다.

② $A \subset B$ 이면 $A^c \subset B^c$ 이다.

③ $B - A = B \cap A^c$

④ $A \cap \varnothing^c = A$

⑤ $U - \varnothing = A \cap A^c$

해설

② $A \subset B$ 이면 $A^c \supset B^c$ 이다.
④ $A \cap \varnothing^c = A \cap U = A$
⑤ $U - \varnothing = U = A \cup A^c$

11. 두 집합 A, B 에 대하여 $n(A-B)=20$, $n(A^c \cap B)=12$, $n(A \cup B)=48$ 일 때, $n(A \cap B)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$A^c \cap B = B - A$

$n(A \cup B) = n(A-B) + n(A \cap B) + n(A^c \cap B)$

$48 = 20 + n(A \cap B) + 12$

$\therefore\ n(A \cap B) = 16$

12. 실수 x에 대하여 두 조건 p : $a \le x \le 1$, q : $x \ge -1$이 있다. 명제 $p \to q$를 참이 되게 하는 상수 a 의 범위는?

① $a > 1$ ② $a \le 1$ ③ $-1 \le a \le 1$

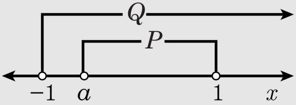
④ $a \ge -1$ ⑤ $a \le -1$

해설

조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

(i) $a > 1$일 때, $P = \varnothing$ 이므로 $P \subset Q$ $\therefore$ $a > 1$

(ii) $a \le 1$ 일 때, 수직선에 나타내면



$\therefore$ $-1 \le a \le 1$

(i), (ii)에서 $a \ge -1$

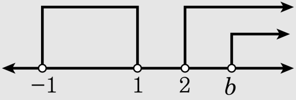
13. $-1<x<1$ 또는 $x>2$ 이 되기 위한 $x>a$은 필요조건이고 $x>b$는 충분조건일 때 a 의 최댓값과 b의 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

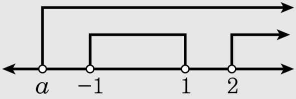
해설

$x>b$ 은 $-1<x<1$ 또는 $x>2$ 이 되기 위한 충분조건에서



$\therefore b \geq 2$

$x>a$ 은 $-1<x<1$ 또는 $x>2$ 이 되기 위한 필요조건에서



$\therefore a \leq -1$

$\therefore a$ 의 최댓값 : -1, b 의 최솟값 : 2

따라서 $(-1)+2=1$

14. x, y, z 는 양수일 때, 다음 식을 간단히 하면?

$$\frac{(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1})\{(xy)^{-1}+(yz)^{-1}+(zx)^{-1}\}}{(x+y+z)(xy+yz+zx)}$$

① $x^{-2}y^{-2}z^{-2}$

② $x^{-2}+y^{-2}+z^{-2}$

③ $(x+y+z)^{-2}$

④ $\dfrac{1}{xyz}$

⑤ $\dfrac{1}{xy+yz+zx}$

해설

$$\frac{1}{x+y+z}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{xy+yz+zx}\right)$$

$$\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)$$

$$=\frac{1}{x+y+z}\left(\frac{xy+yz+zx}{xyz}\right)\left(\frac{1}{xy+yz+zx}\right)$$

$$\left(\frac{x+y+z}{xyz}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{xyz}\right)^2=x^{-2}y^{-2}z^{-2}$$

15. $a+b+c=0$일 때, $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

(주어진 식)

$$=\frac{a(b+c)}{bc}+\frac{b(c+a)}{ca}+\frac{c(a+b)}{ab}$$

$$=\frac{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)}{abc}$$

$$=\frac{(b+c)^3+b^2(-b)+c^2(-c)}{-(b+c)bc}$$

$$=\frac{(b+c)^3-(b^3+c^3)}{-(b+c)bc}$$

$$=\frac{3bc(b+c)}{-(b+c)bc}=-3$$

16. $x=\sqrt{\sqrt{49}-\sqrt{48}}$ 일 때, $x^4-3x^3-3x^2+x+1$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$x=\sqrt{\sqrt{49}-\sqrt{48}}=\sqrt{7-2\sqrt{12}}$$
$$=\sqrt{(4+3)-2\sqrt{4\times 3}}$$
$$=\sqrt{4}-\sqrt{3}=2-\sqrt{3}$$

$x=2-\sqrt{3}$ 에서 $(x-2)^2=(-\sqrt{3})^2$

$x^2-4x+4=3$

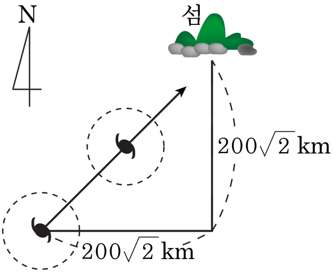
$\therefore\ x^2-4x+1=0$

$x^4-3x^3-3x^2+x+1$

$=x^2(x^2-4x+1)+x^3-4x^2+x+1$

$=x^3-4x^2+x+1=x(x^2-4x+1)+1=1$

17. 반지름의 길이가 10 km 인 원 모양의 섬이 있다. 현재 태풍의 중심은 이 섬의 중심으로부터 남쪽으로 $200\sqrt{2}$ km, 서쪽으로 $200\sqrt{2}$ km 떨어진 곳에서 시속 10 km 의 속력으로 북동쪽으로 진행하고 있다. 태풍의 중심에서 30 km 이내가 폭풍우권이라고 할 때, 처음으로 이 섬 전체가 폭풍우권에 들어가는데 걸리는 시간은 몇 시간인지 구하면?(단, 폭풍우권의 크기는 일정하다.)

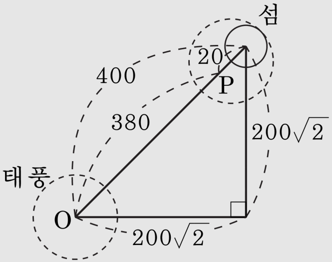


▶ 답 : ______ 시간

▷ 정답 : 38 시간

해설

태풍이 O 에서 출발하여 P 지점에 도착하면
섬 전체가 폭풍우권에 들어간다.
$\overline{OP} = 380(\text{km})$ 이므로 걸리는 시간은 38 시간



18. 자연수 전체의 집합의 부분집합 A에 대하여 다음을 만족하는 집합 A의 개수는? (단, $A \neq \phi$)

$x \in A$이면 $\dfrac{81}{x} \in A$

① 5개 ② 6개 ③ 7개 ④ 8개 ⑤ 9개

해설

A 는 81의 약수를 원소로 하는 집합인데
$n(A)=1$인 경우는 $\{9\}$ 1개
$n(A)=2$인 경우는 $\{1,\ 81\}$, $\{3,\ 27\}$ 2개
$n(A)=3$인 경우는 $\{1,\ 9,\ 81\}$, $\{3,\ 9,\ 27\}$ 2개
$n(A)=4$인 경우는 $\{1,\ 3,\ 27, 81\}$ 1개
$n(A)=5$인 경우는 $\{1,\ 3,\ 9, 27, 81\}$ 1개
$\therefore$ 7 개

19. 집합 $A=\{\varnothing,\ 0,\ 1,\ \{0\},\ \{1\}\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\varnothing \in A$ ② $\varnothing \subset A$ ③ $\{\varnothing\} \subset A$

④ $\{0,\ 1\} \in A$ ⑤ $\{\{0\},\ 0\} \subset A$

해설

① 집합 A 에 속에 있는 $\varnothing$ 은 집합 A 의 원소이다.

② 공집합 $\varnothing$ 는 모든 집합의 부분집합이다.

③ $\{\varnothing\} \subset A$

④ $\{0,\ 1\} \subset A$

20. 두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 에 대하여$A\times B=\{(a,\ b)|a\in A,\ b\in B\}$ 로 정의할 때, $(A\times B)\cup(B\times A)$ 의 원소의 개수는?

① 12 개　② 16 개　③ 20 개　④ 24 개　⑤ 28 개

해설

$A\times B$는 $a\in A$, $b\in B$인 모든 순서쌍 $(a,\ b)$로 이루어지므로

$A\times B=\{(1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (1,5),\ (2,2),\ (2,3),\ (2,4),\ (2,5),\ (3,2),\ (3,3),\ (3,4),\ (3,5)\}$

$B\times A=\{(2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (3,1),\ (3,2),\ (3,3),\ (4,1),\ (4,2),\ (4,3),\ (5,1),\ (5,2),\ (5,3)\}$

$(A\times B)\cap(B\times A)=\{(2,2),\ (2,3),\ (3,2),\ (3,3)\}$

따라서, $n(A\times B)=12,\ n(B\times A)=12,\ n((A\times B)\cap(B\times A))=4$ 이므로

$n((A\times B)\cup(B\times A))=n(A\times B)+n(B\times A)-n((A\times B)\cap(B\times A))$

$=12+12-4=20$

21. 임의의 양의 실수 x에 대하여, x를 넘지 않는소수의 개수를 $f(x)$라 하자. 예를 들면 $f\left(\frac{5}{2}\right) = 1$, $f(5) = 3$ 이다.<보기> 중 옳은 것을 모두 고르면?

<보기>

ㄱ $f(10) = 4$

ㄴ 임의의 실수 x에 대하여 $f(x) < x$ 이다.

ㄷ 임의의 양의 실수 x에 대하여 $f(x+1) = f(x)$ 이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

10 이하의 소수는 $2, 3, 5, 7$ 이므로 $f(10) = 4$

ㄴ $f(x) < [x] \leq x$ 이므로 $f(x) < x$

ㄷ $x = 2$인 경우 $f(3) = 2, f(2) = 1$이므로 $f(3) \neq f(2)$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

22. 함수 $f(x) = [x[x]]$ 에 대한 보기의 설명 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고른 것은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수)

보기

ㄱ $f(x) = -1$ 이 되는 x 는 존재하지 않는다.

ㄴ 자연수 n 에 대해서 집합 $\{f(x) \mid n \le x < n+1\}$ 의 원소의 개수는n 개이다.

ㄷ 자연수 n 에 대해서 집합 $\{f(x) \mid -n \le x < -n+1\}$ 의 원소의 개수는 $n+1$ 개이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ $x \ge 0$ 이면 $[x] \ge 0$ 이므로 $x[x] \ge 0$

$x < 0$ 이면 $[x] < 0$ 이므로 $x[x] > 0$

그러므로 모든 x 에 대하여 $f(x) = [x[x]]$ 이므로

$f(x) = -1$ 은 존재하지 않는다. (참)

ㄴ 자연수 n 에 대하여 $n \le x < n+1$ 이면 $[x] = n$ 이므로

$f(x) = [nx]$

$n^2 \le nx < n^2 + n$ 이고 $[nx]$ 는 정수이므로

$f(x)$ 의 원소의 개수는 $n^2,\ n^2+1,\ \cdots,\ n^2+(n-1)$ 로서

모두 n 개이다. (참)

ㄷ 자연수 n 에 대하여 $-n \le x < n+1$ 이면 $[x] = -n$ 이므로

각 변에 $-n$ 을 곱하면, $f(x) = [-nx]$ 이고 $n^2 - n < -nx \le n^2$

따라서 $f(x)$ 의 원소의 개수는

$n^2-n, (n^2-n)+1, \cdots, (n^2-n)+(n-1), (n^2-n)+n$

로서 모두 $n+1$ 개 이다. (참)

23. 함수 $y = \dfrac{2x-1}{x+2}$ 에 관한 설명 중 틀린 것을 고르면?

① 점근선 중 하나는 $x = -2$ 이다.

② 점근선 중 하나는 $y = 2$ 이다.

③ 함수 $y = \dfrac{2}{x} + 2$ 의 그래프를 x 축 방향으로 -5만큼 평행이동한 그래프다.

④ 이 그래프는 x축을 지난다.

⑤ 함수 $y = \dfrac{-5}{x+2}$ 의 그래프를 y 축 방향으로 2 만큼 평행이동한 그래프다.

해설

$$y = \frac{2x-1}{x+2} = \frac{2(x+2)-5}{x+2} = \frac{-5}{x+2} + 2$$

그러므로 함수의 점근선은 $x = -2,\ y = 2$이고

$y = \dfrac{-5}{x}$ 의 그래프를 x축 방향으로 -2만큼,

y축 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이다.

따라서 설명 중 틀린 것은 ③이다.

24. $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 8$일 때, $x^2 + \sqrt{6}x$의 값은? (단, $0 < x < 1$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 8$의 양변에 x^2을 곱하고 정리하면

$(x^2)^2 - 8x^2 + 1 = 0$

근의 공식으로 풀면

$x^2 = 4 - \sqrt{15}$ $(\because\ 0 < x < 1) \cdots ①$

$x = \sqrt{4 - \sqrt{15}}$ $(\because\ 0 < x)$

$$= \sqrt{\frac{8 - 2\sqrt{15}}{2}} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdots ②$$

①, ②에 따라

$x^2 + \sqrt{6}x$

$$= (4 - \sqrt{15}) + \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

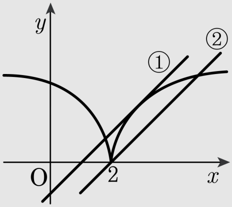
$= 4 - \sqrt{15} + \sqrt{15} - 3 = 1$

25. $y = \sqrt{|x-2|}$ 와 $y = x + k$ 가 서로 다른 세 점에서 만날 때의 k값의 범위를 구하면?

① $-2 < k < -\frac{7}{4}$ ② $-2 < k \leq -\frac{7}{4}$ ③ $-2 \leq k < -\frac{7}{4}$
④ $-2 \leq k \leq -\frac{7}{4}$ ⑤ $k < -\frac{7}{4}$

해설

$y = \sqrt{|x-2|}$ 의 개형은



와 같고

$y = x + k$ 가 그림의 ①, ② 사이에 있으면 된다.

① $y = \sqrt{x-2}$ 와 $y = x + k$ 가 접할 때,

$x + k = \sqrt{x-2}$에서

$x^2 + (2k-1)x + k^2 + 2 = 0$

$D = (2k-1)^2 - 4k^2 - 8 = 0$

$\therefore\ k = -\frac{7}{4}$

② $y = x + k$ 가 $(2, 0)$ 을 지날 때

$0 = 2 + k$

$k = -2$

$\therefore -2 < k < -\frac{7}{4}$