

1. 삼각형 ABC의 세 꼭짓점의 좌표가 A (1, 1), B (2, 4), C(6, 3)이고 선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점을 D라 하자. 삼각형 BCD의 무게중심의 좌표가 (x, y)일 때, $x - y$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

두 점 A(1, 1), B(2, 4)이므로

점 D의 좌표를 (a, b)라 하면

$$a = \frac{2 \cdot 2 - 1 \cdot 1}{2 - 1} = 3, b = \frac{2 \cdot 4 - 1 \cdot 1}{2 - 1} = 7$$

따라서 D(3, 7)이므로

삼각형 BCD의 무게중심의 좌표 (x, y)는

$$x = \frac{2 + 6 + 3}{3} = \frac{11}{3}, y = \frac{4 + 3 + 7}{3} = \frac{14}{3}$$

$$\therefore x - y = \frac{11}{3} - \frac{14}{3} = -1$$

2. 두 점 A(1, 2), B(-3, 4) 를 지나는 직선에 평행하고 y 절편이 -1 인 직선의 방정식은 $y = ax + b$ 이다. 이 때, $a + b$ 의 값은 ?

① -2 ② $-\frac{3}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

해설

직선 $y = ax + b$ 는 두 점 A(1, 2), B(-3, 4) 를 지나는 직선에 평행하므로 기울기는 같다.

$$\therefore a = \frac{2-4}{1-(-3)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

또, y 절편이 -1 이므로 $b = -1$

$$\therefore a + b = -\frac{1}{2} + (-1) = -\frac{3}{2}$$

4. 점 $(1, 0)$ 을 지나고 직선 $x + \sqrt{2}y + 3 = 0$ 에 수직인 직선의 y 절편은?

- ① $-\sqrt{3}$ ② $-\sqrt{2}$ ③ -1 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

해설

직선 $x + \sqrt{2}y + 3 = 0$ 의 기울기가 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로

구하는 직선의 기울기는 $\sqrt{2}$ 이다.

따라서 구하는 직선은 $y = \sqrt{2}(x - 1)$ 이므로

이 직선의 y 절편은 $-\sqrt{2}$ 이다.

5. 두 점 $(2, 3)$, $(1, 2)$ 를 지나는 직선 위에 두 직선 $y - 3x - 4 = 0$, $y - ax - 2 = 0$ 의 교점이 있다고 할 때, a 의 값을 구하면?

① $\frac{2}{3}$

② $\frac{4}{3}$

③ $\frac{5}{3}$

④ $\frac{8}{3}$

⑤ $\frac{10}{3}$

해설

결국 세 직선의 교점이 일치하므로

두 점 $(2, 3)$, $(1, 2)$ 를 지나는

직선과 직선 $y - 3x - 4 = 0$ 의 교점이

직선 $y - ax - 2 = 0$ 위에 있다.

두 점 $(2, 3)$, $(1, 2)$ 를 지나는 직선은

$$y - 2 = \frac{3 - 2}{2 - 1}(x - 1)$$

$$\therefore y = x + 1$$

따라서 두 직선

$$y - 3x - 4 = 0 \text{과 } y = x + 1 \text{의 교점은 } \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

교점이 $y - ax - 2 = 0$ 위에 있으므로

$$-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}a - 2 = 0$$

$$\therefore a = \frac{5}{3}$$

6. 점 A(1, 2)와 B(-1, -2)를 두 개의 꼭짓점으로 하는 정삼각형의 다른 꼭짓점 C의 좌표를 구하면?
- ① $C(\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3}, \sqrt{3})$
 - ② $C(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3}, \sqrt{3})$
 - ③ $C(2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3}, \sqrt{3})$
 - ④ $C(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 또는 $C(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$
 - ⑤ $C(-2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$

해설

정삼각형이므로 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$
점 C의 좌표를 (x, y)라 하면, $\overline{AB} = \overline{BC}$ 에서
 $\sqrt{(1+1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면
 $x^2 + 2x + y^2 + 4y = 15 \dots\dots \textcircled{1}$
 $\overline{AB} = \overline{CA}$ 에서
 $\sqrt{(1+1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면
 $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 15 \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 에서 $x + 2y = 0$
 $\therefore x = -2y$
이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $4y^2 - 4y + y^2 + 4y = 15$
 $\therefore y^2 = 3$
 $\therefore y = \pm\sqrt{3}$
따라서 $x = \mp 2\sqrt{3}$ (복호동순)
 $\therefore C(2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3}, \sqrt{3})$

7. 두 점 A(3, 3), B(1, 6)과 y축 위에 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은?

- ① 4 ② $4\sqrt{2}$ ③ 5 ④ $5\sqrt{2}$ ⑤ $4\sqrt{5}$

해설

점 B의 y축에 대한 대칭점을 점 B'(-1, 6)이라 하면 $\overline{BP} = \overline{B'P}$ 이므로
 $\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{AP} + \overline{B'P} \geq \overline{AB'}$
그런데 $\overline{AB'} = \sqrt{(3+1)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{25} = 5$
 $\therefore \overline{AP} + \overline{BP} \geq 5$

8. 평행사변형 ABCD에서 꼭짓점 A(4, 2), B(0, 3), C(-2, -4)일 때, 나머지 한 꼭짓점 D의 좌표를 구하면?

- ① D(1, 5) ② D(2, 1) ③ D(3, 2)
④ D(2, -5) ⑤ D(1, 3)

해설

평행사변형은 밑변과 윗변이 평행하면서 길이가 같다.

따라서 점 A가 B의 좌표보다

x 축으로 4만큼, y 축으로 -1 만큼 이동한 것을

점 C에 적용할 수 있다.

따라서 D $(-2 + 4, -4 + (-1))$

$\therefore$ D(2, -5)

9. 삼각형 ABC의 꼭짓점 A의 좌표가 (5, 4), 변 AB의 중점의 좌표가 (-1, 3), 무게중심의 좌표가 (1, 2) 일 때, 변 BC의 중점의 좌표를 (a, b)라 할 때, a + b의 값을 구하면?

① -3 ② 0 ③ 2 ④ 5 ⑤ 7

해설

점 B(X, Y)라 하면,

$$\overline{AB} \text{의 중점} : \left(\frac{X+5}{2}, \frac{Y+4}{2} \right) = (-1, 3)$$

$$\therefore X = -7, Y = 2$$

이제 점 C(x, y)라 하면,

$$\text{무게중심은} \left(\frac{5 + (-7) + x}{3}, \frac{4 + 2 + y}{3} \right) = (1, 2)$$

$$\therefore x = 5, y = 0$$

$\therefore$ 변 BC의 중점은

$$\left(\frac{-7 + 5}{2}, \frac{2 + 0}{2} \right) = (-1, 1)$$

10. 원점 O와 두 정점 A(2, 3), B(4, 0)에 대하여 $\overline{OP}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 을 만족하는 점 P의 자취의 방정식을 구하면?

① $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 29 = 0$

② $x^2 + y^2 + 12x - 6y + 29 = 0$

③ $x^2 + y^2 - 12x + 6y + 29 = 0$

④ $x^2 + y^2 - 12x - 6y - 29 = 0$

⑤ $x^2 + y^2 + 12x + 6y + 29 = 0$

해설

P의 좌표를 P(x, y)라 하면

$\overline{OP}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 이므로

$$x^2 + y^2$$

$$= \{(x-2)^2 + (y-3)^2\} + \{(x-4)^2 + y^2\}$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 12x - 6y + 29 = 0$$

11. 두 점 A(-2, 0), B(1, -1)에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 값이 최소가 될 때의 점 P의 좌표를 구하면?

- ㉠ P $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ㉡ P (-1, -1) ㉢ P (0, 0)
㉣ P $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ㉤ P (1, 1)

해설

점 P의 좌표를 (x, y)라고 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 &= (x+2)^2 + y^2 + (x-1)^2 + (y+1)^2 \\ &= 2x^2 + 2x + 2y^2 + 2y + 6 \\ &= 2(x^2 + x) + 2(y^2 + y) + 6 \\ &= 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + 5\end{aligned}$$

따라서 $x = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$ 일 때,

$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 값이 최소가 된다.

$$\therefore P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

12. 점 $O(0, 0)$, $A(4, 2)$ 를 잇는 선분 OA 의 수직이등분선의 방정식을 $y = mx + n$ 이라고 할 때, $m^2 + n^2$ 의값을 구하면?

① 20

② 29

③ 30

④ 39

⑤ 49

해설

수직이등분선은 $\overline{OA}$ 기울기에 수직하고 $\overline{OA}$ 의 중점은 수직이등분선 위에 있다.

i) $\overline{OA}$ 의 기울기 : $\frac{1}{2}$

수직이등분선의 기울기 : -2

ii) $\overline{OA}$ 의 중점 : $(2, 1)$

$$\therefore y = -2(x - 2) + 1 = -2x + 5$$

$$\Rightarrow m^2 + n^2 = 29$$

13. 점 $(3, 4)$ 에서 직선 $2x - y + k = 0$ 까지의 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 양수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = 3$

해설

$$\frac{|2 \times 3 - 4 + k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5} \text{ 이므로 } |2 + k| = 5 \text{ 이다.}$$

따라서 $k = 3$ ($\because k$ 는 양수)

14. 두 직선 $3x + 4y = 24$, $3x + 4y = 7$ 사이의 거리를 $\frac{b}{a}$ (a, b 는 서로소)라 할 때, $b - a$ 의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점과 다른 직선 사이의 거리를 구하면 된다.

$3x + 4y = 24$ 의 점 (0, 6)

$$\frac{|4 \times 6 - 7|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{17}{5}$$

$$\therefore b - a = 12$$

15. 점 $(a, 2)$ 에서 직선 $12x - 5y - 4 = 0$ 에 이르는 거리가 2 가 되도록 하는 실수 a 의 값들의 합은?

- ① $-\frac{1}{3}$ ② 0 ③ 1 ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{7}{3}$

해설

점 $(a, 2)$ 에서 직선 $12x - 5y - 4 = 0$ 에 이르는 거리가 2 이므로

$$2 = \frac{|12a - 5 \times 2 - 4|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{|12a - 14|}{13}$$

$$\therefore |12a - 14| = 26 \text{ 즉, } 12a - 14 = 26$$

$$\text{또는 } 12a - 14 = -26 \therefore a = \frac{10}{3}$$

또는 $a = -1$ 따라서 실수 a 의 값의 합은

$$\frac{10}{3} + (-1) = \frac{7}{3}$$

16. 꼭짓점의 좌표가 A(0, 0), B(36, 15), C(a, b)인 삼각형 ABC가 있다.

a, b가 정수일 때, △ABC의 넓이의 최소는?

- ① $\frac{1}{2}$
- ② 1
- ③ $\frac{3}{2}$
- ④ $\frac{13}{2}$
- ⑤ 최솟값은 없다

해설

직선 $\overline{AB}$ 의 방정식은 $5x - 12y = 0$

△ABC의 높이 h 는

$$h = \frac{|5a - 12b|}{\sqrt{5^2 + 12^2}}$$

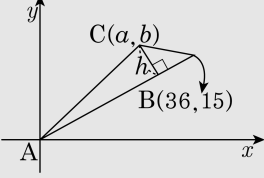
△ABC의 넓이 S는 $S = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{12^2 + 5^2} \cdot \frac{|5a - 12b|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{3}{2} |5a - 12b|$$

a, b는 정수이므로, $|5a - 12b| = 1$ 일 때,

S의 최소는 $\frac{3}{2}$

실제로 $(a, b) = (5, 2)$ 또는 $(7, 3)$ 일 때이다.



17. 점 (a, b) 가 직선 $2x - y - 2 = 0$ 위를 움직일 때, 점 $(a, a + b)$ 의 자취의 방정식은?

- ㉠ $y = 3x - 2$ ㉡ $y = 4x - 3$ ㉢ $y = 5x - 4$
㉣ $y = 6x - 5$ ㉤ $y = 7x - 6$

해설

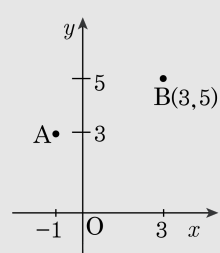
$x = a \cdots \textcircled{1}$
 $y = a + b \cdots \textcircled{2}$ 에서
 a, b 를 소거한다.
점 (a, b) 가 직선 $2x - y - 2 = 0$ 위를
움직이므로 $2a - b - 2 = 0$
 $\therefore b = 2a - 2$ 이것을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면
 $y = 3a - 2$
 $\therefore y = 3x - 2$ ($\because \textcircled{1}$)

18. 두 점 A(-1, 3), B(3, 5)에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점을 P, y 축 위의 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이를 구하면?

- ① 4 ② $\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{5}$ ④ $3\sqrt{5}$ ⑤ $4\sqrt{5}$

해설

P(a , 0)이라하면, $\overline{AP} = \overline{BP}$
 $(a+1)^2 + 3^2 = (a-3)^2 + 5^2$, $8a = 24$
 $\therefore a = 3$
Q(0, b)이라 하면, $\overline{AQ} = \overline{BQ}$
 $1^2 + (b-3)^2 = (-3)^2 + (b-5)^2$
 $\therefore 4b = 24$
 $\therefore b = 6$ P(3, 0), Q(0, 6)
 $\therefore \overline{PQ} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$



19. 두 점 A(-2, 1), B(4, -3)에서 같은 거리에 있고 직선 $y = 2x - 1$ 위에 있는 점 P의 좌표는?

- ① (-3, -7) ② (-2, -5) ③ (3, 5)
④ (2, 3) ⑤ (2, 5)

해설

점 P의 좌표를 (a, b) 라 하면 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 에서

$$(a+2)^2 + (b-1)^2 = (a-4)^2 + (b+3)^2$$

정리하면 $12a - 8b = 20$

$$\therefore 3a - 2b = 5 \cdots \textcircled{1}$$

또, P는 $y = 2x - 1$ 위에 있으므로

$$b = 2a - 1 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = -3, b = -7$

20. $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB} = 8$, $\overline{AC} = x$ 이고, $\overline{BC}$ 의 중점을 M이라 할 때, $\overline{BM} = 7$, $\overline{AM} = 1$ 일 때, x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 6$

해설

파포스의 정리에 의하여

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2) \text{ 이므로}$$

$$8^2 + x^2 = 2(7^2 + 1^2)$$

$$\therefore x = \pm 6$$

$$x > 0 \text{ 이므로 } x = 6$$

21. 좌표평면 위에 두 점 $A(a, b)$, $B(-2, 2)$ 가 있다. 이 0때, $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(a+2)^2 + (b-2)^2}$ 의 최솟값은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

원점을 $O(0, 0)$ 이라 하면

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(a+2)^2 + (b-2)^2}$$

$= \overline{OA} + \overline{AB}$ 이므로

이 값이 최소가 되는 것은 세 점 O , A , B 가 일직선 위에 있을 때이다.

따라서 $\overline{OA} + \overline{AB}$ 의 최소값은

$$\overline{OB} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

22. 직선 $x + y = 1$ 은 두 점, A(-2, 0), B(0, 7)을 잇는 선분 AB를 어떤 비로 내분하는가?

① 3 : 2 ② 2 : 3 ③ 1 : 1 ④ 2 : 1 ⑤ 1 : 2

해설

선분 AB를 $m : n$ 으로 내분하는 점을 P 라 하면,

점 P 의 좌표는

$$\left(\frac{m \cdot 0 + n \cdot (-2)}{m + n}, \frac{m \cdot 7 + n \cdot 0}{m + n} \right) = \left(\frac{-2n}{m + n}, \frac{7m}{m + n} \right)$$

그런데, 점 P 는 직선 $x + y = 1$ 위의 점이므로 대입하면,

$$\frac{-2n}{m + n} + \frac{7m}{m + n} = 1, -2n + 7m = m + n, 2m = n$$

$$\therefore m : n = 1 : 2$$

23. 세 점 $A(-2, 0)$, $B(-1, \sqrt{3})$, $C(1, -4)$ 를 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, $\triangle ABD$ 와 $\triangle ACD$ 의 넓이의 비는?

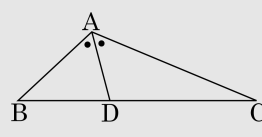
① 1 : 2 ② 1 : 3 ③ 1 : 4 ④ 2 : 3 ⑤ 2 : 5

해설

점 D 가 $\angle A$ 의 이등분선과 변 BC 의 교점이므로

$$\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{AC} = \sqrt{1+3} : \sqrt{9+16} = 2 : 5$$

$$\therefore \triangle ABD : \triangle ACD = \overline{BD} : \overline{DC} = 2 : 5$$



24. 다음 두 직선 $2x + y - 2 = 0, mx - y - 3m + 5 = 0$ 이 제 1 사분면에서 만나도록 m 의 값의 범위는?

- ㉠ $1 < m < \frac{5}{2}$ ㉡ $1 \leq m < \frac{5}{2}$ ㉢ $1 < m \leq \frac{5}{2}$
 ㉣ $2 < m < \frac{5}{2}$ ㉤ $2 \leq m < \frac{5}{2}$

해설

두 직선의 방정식을 연립하여 교점을 찾으면

$$\Rightarrow \left(\frac{3m-3}{m+2}, \frac{-4m+10}{m+2} \right)$$

교점이 1 사분면 위에 있으므로

i) $\frac{3(m-1)}{m+2} > 0$

$$\Rightarrow m < -2 \text{ 또는 } m > 1$$

ii) $\frac{2(2m-5)}{m+2} < 0$

$$\Rightarrow -2 < m < \frac{5}{2}$$

i), ii) 의 공통영역을 구하면 $1 < m < \frac{5}{2}$

해설

$2x + y - 2 = 0$ 의 x, y 절편의 좌표를 각각 구하면 $(1, 0), (0, 2)$ 이고

$y = m(x-3) + 5$ 는 다음 그림과 같이 m 값에 관계없이 $(3, 5)$ 를 지나는 직선이다. $(0, 2)$ 를 대입하면 $m = 1, (1, 0)$

을 대입하면 $m = \frac{5}{2}$

$$\therefore 1 < m < \frac{5}{2}$$

