1. 삼각형 ABC의 세 꼭짓점의 좌표가 A$(1,\ 1)$, B$(2,\ 4)$, C$(6,\ 3)$이고 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점을 D라 하자. 삼각형 BCD의 무게중심의 좌표가 $(x,\ y)$일 때, $x-y$의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

두 점 A$(1,\ 1)$, B$(2,\ 4)$이므로

점 D의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$$a=\frac{2\cdot2-1\cdot1}{2-1}=3,\ b=\frac{2\cdot4-1\cdot1}{2-1}=7$$

따라서 D$(3,\ 7)$이므로

삼각형 BCD의 무게중심의 좌표 $(x,\ y)$는

$$x=\frac{2+6+3}{3}=\frac{11}{3},\ y=\frac{4+3+7}{3}=\frac{14}{3}$$

$$\therefore x-y=\frac{11}{3}-\frac{14}{3}=-1$$

2. 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$, $\mathrm{B}(-3,\ 4)$ 를 지나는 직선에 평행하고 y 절편이 -1 인 직선의 방정식은 $y = ax + b$ 이다. 이 때, $a + b$ 의 값은 ?

① -2　② $-\frac{3}{2}$　③ 0　④ $\frac{3}{2}$　⑤ 2

해설

직선 $y = ax + b$ 는 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$, $\mathrm{B}(-3,\ 4)$ 를 지나는 직선에 평행하므로 기울기는 같다.

$$\therefore\ a = \frac{2-4}{1-(-3)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

또, y 절편이 -1 이므로 $b = -1$

$$\therefore\ a + b = -\frac{1}{2} + (-1) = -\frac{3}{2}$$

3. 일차함수 $\sqrt{3}x-y=1$ 의 기울기와 y 절편, x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 : $\underline{\quad\circ}$

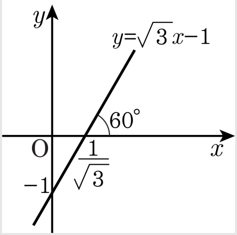
▷ 정답 : 기울기 $\sqrt{3}$

▷ 정답 : y절편 -1

▷ 정답 : $60\,\underline{\circ}$

해설

$y=\sqrt{3}x-1$ 에서
기울기 $\sqrt{3}$, y 절편 -1, x 축의 양의 방향과 이루는 각 $60°$



4. 점 $(1,\ 0)$을 지나고 직선 $x+\sqrt{2}y+3=0$에 수직인 직선의 y절편은?

① $-\sqrt{3}$ ② $-\sqrt{2}$ ③ -1 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

해설

직선 $x+\sqrt{2}y+3=0$의 기울기가 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$이므로

구하는 직선의 기울기는 $\sqrt{2}$이다.
따라서 구하는 직선은 $y=\sqrt{2}(x-1)$이므로
이 직선의 y절편은 $-\sqrt{2}$이다.

5. 두 점 $(2,\ 3)$, $(1, 2)$를 지나는 직선 위에 두 직선 $y-3x-4=0$, $y-ax-2=0$의 교점이 있다고 할 때, a의 값을 구하면?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

해설

결국 세 직선의 교점이 일치하므로
두 점 $(2,\ 3)$, $(1,\ 2)$를 지나는
직선과 직선 $y-3x-4=0$의 교점이
직선 $y-ax-2=0$위에 있다.
두 점 $(2,\ 3)$, $(1, 2)$를 지나는 직선은

$$y-2=\frac{3-2}{2-1}(x-1)$$

$\therefore\ y=x+1$
따라서 두 직선
$y-3x-4=0$과 $y=x+1$의 교점은 $\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$
교점이 $y-ax-2=0$위에 있으므로

$$-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}a-2=0$$

$\therefore\ a=\frac{5}{3}$

6. 점 A(1, 2)와 B(−1, − 2)를 두 개의 꼭짓점으로 하는 정삼각형의 다른 꼭짓점 C의 좌표를 구하면?

① $C(\sqrt{3},\ -2\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$

② $C(-\sqrt{3},\ \sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$

③ $C(2\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$

④ $C(2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$ 또는 $C(2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$

⑤ $C(-2\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$

해설

정삼각형이므로 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$

점 C의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면, $\overline{AB}=\overline{BC}$에서

$\sqrt{(1+1)^2+(2+2)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2+2x+y^2+4y=15\cdots\cdots$ ㉠

$\overline{AB}=\overline{CA}$에서

$\sqrt{(1+1)^2+(2+2)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-2x+y^2-4y=15\cdots\cdots$ ㉡

㉠ − ㉡에서 $x+2y=0$

$\therefore\ x=-2y$

이것을 ㉠에 대입하면 $4y^2-4y+y^2+4y=15$

$\therefore\ y^2=3$

$\therefore\ y=\pm\sqrt{3}$

따라서 $x=\mp2\sqrt{3}$ (복호동순)

$\therefore\ C(2\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$

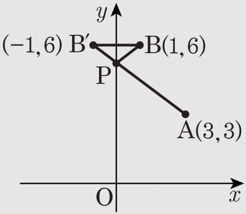
7. 두 점 A(3, 3), B(1, 6)과 y축 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은?

① 4　② $4\sqrt{2}$　③ 5　④ $5\sqrt{2}$　⑤ $4\sqrt{5}$

해설

점 B의 y축에 대한 대칭점을 점 B′(−1, 6)이라 하면 $\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{B'P}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}\geq\overline{\mathrm{AB'}}$



그런데 $\overline{\mathrm{AB'}}=\sqrt{(3+1)^2+(3-6)^2}=\sqrt{25}=5$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}\geq 5$

8. 평행사변형 ABCD에서 꼭짓점
$A(4,\ 2)$, $B(0,\ 3)$,$C(-2,\ -4)$일 때, 나머지 한 꼭짓점 D의 좌표를 구하면?

① $D(1,\ 5)$ ② $D(2,\ 1)$ ③ $D(3,\ 2)$
④ $D(2,\ -5)$ ⑤ $D(1,\ 3)$

해설

평행사변형은 밑변과 윗변이 평행하면서 길이가 같다.
따라서 점 A가 B의 좌표보다
x축으로 4만큼, y축으로 -1만큼 이동한 것을
점 C에 적용할 수 있다.
따라서 $D(-2+4, -4+(-1))$
$\therefore\ D(2,\ -5)$

9. 삼각형 ABC 의 꼭짓점 A 의 좌표가 $(5,\ 4)$, 변 AB 의 중점의 좌표가 $(-1,\ 3)$, 무게중심의 좌표가 $(1,\ 2)$ 일 때, 변 BC 의 중점의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① -3 ② 0 ③ 2 ④ 5 ⑤ 7

해설

점 $\mathrm{B}(X, Y)$ 라 하면,

$\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점 : $\left(\dfrac{X+5}{2}, \dfrac{Y+4}{2}\right) = (-1, 3)$

$\therefore\ X = -7,\ Y = 2$

이제 점 $\mathrm{C}(x, y)$ 라 하면,

무게중심은 $\left(\dfrac{5+(-7)+x}{3}, \dfrac{4+2+y}{3}\right) = (1, 2)$

$\therefore\ x = 5,\ y = 0$

$\therefore$ 변 BC 의 중점은

$\left(\dfrac{-7+5}{2}, \dfrac{2+0}{2}\right) = (-1, 1)$

10. 원점 O와 두 정점 A(2, 3), B(4, 0)에 대하여 $\overline{OP}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$을 만족하는 점 P의 자취의 방정식을 구하면?

① $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 29 = 0$

② $x^2 + y^2 + 12x - 6y + 29 = 0$

③ $x^2 + y^2 - 12x + 6y + 29 = 0$

④ $x^2 + y^2 - 12x - 6y - 29 = 0$

⑤ $x^2 + y^2 + 12x + 6y + 29 = 0$

해설

P의 좌표를 P(x, y)라 하면

$\overline{OP}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$이므로

$x^2 + y^2$

$= \{(x-2)^2 + (y-3)^2\} + \{(x-4)^2 + y^2\}$

$\therefore \; x^2 + y^2 - 12x - 6y + 29 = 0$

11. 두 점 A$(-2,\ 0)$, B$(1,\ -1)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 값이 최소가 될 때의 점 P의 좌표를 구하면?

① $\mathrm{P}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$　② $\mathrm{P}(-1, -1)$　③ $\mathrm{P}(0, 0)$
④ $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$　⑤ $\mathrm{P}(1, 1)$

해설

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2 &= (x+2)^2+y^2+(x-1)^2+(y+1)^2\\ &= 2x^2+2x+2y^2+2y+6\\ &= 2\left(x^2+x\right)+2\left(y^2+y\right)+6\\ &= 2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+2\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+5\end{aligned}$$

따라서 $x=-\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$일 때,

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 값이 최소가 된다.

$\therefore \mathrm{P}\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

12. 점 O(0, 0), A(4, 2) 를 잇는 선분 OA 의 수직이등분선의 방정식을 $y = mx + n$ 이라고 할 때, $m^2 + n^2$ 의값을 구하면?

① 20 ② 29 ③ 30 ④ 39 ⑤ 49

해설

수직이등분선은 $\overline{\text{OA}}$ 기울기에 수직하고 $\overline{\text{OA}}$ 의 중점은 수직이등분선 위에 있다.

i) $\overline{\text{OA}}$ 의 기울기 : $\dfrac{1}{2}$

수직이등분선의 기울기 : -2

ii) $\overline{\text{OA}}$ 의 중심 : $(2, 1)$

$\therefore \quad y = -2(x-2) + 1 = -2x + 5$

$\Rightarrow \quad m^2 + n^2 = 29$

13. 점 $(3, 4)$ 에서 직선 $2x - y + k = 0$ 까지의 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 양수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = 3$

해설

$\dfrac{|2 \times 3 - 4 + k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5}$ 이므로 $|2 + k| = 5$ 이다.

따라서 $k = 3$ ($\because$ k 는 양수)

14. 두 직선 $3x+4y=24, 3x+4y=7$ 사이의 거리를 $\frac{b}{a}$(a, b 는 서로소) 라 할 때, $b-a$ 의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점과 다른 직선 사이의 거리를 구하면 된다.

$3x+4y=24$ 의 점 $(0,\ 6)$

$$\frac{|4\times 6-7|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{17}{5}$$

$\therefore\ \ b-a=12$

15. 점 $(a, 2)$ 에서 직선 $12x-5y-4=0$ 에 이르는 거리가 2 가 되도록 하는 실수 a 의 값들의 합은?

① $-\frac{1}{3}$ ② 0 ③ 1 ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{7}{3}$

해설

점 $(a, 2)$ 에서 직선 $12x-5y-4=0$ 에 이르는 거리가 2 이므로

$$2=\frac{|12a-5\times 2-4|}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}=\frac{|12a-14|}{13}$$

$\therefore |12a-14|=26$ 즉, $12a-14=26$

또는 $12a-14=-26$. $\therefore a=\frac{10}{3}$

또는$a=-1$ 따라서 실수 a 의 값의 합은

$$\frac{10}{3}+(-1)=\frac{7}{3}$$

16. 꼭짓점의 좌표가 A(0, 0), B(36, 15), C(a, b)인 삼각형 ABC가 있다. a, b가 정수일 때, △ABC의 넓이의 최소는?

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{13}{2}$　⑤ 최솟값은 없다

해설

직선 $\overline{AB}$의 방정식은 $5x - 12y = 0$
△ABC의 높이 h는

$$h = \frac{|5a - 12b|}{\sqrt{5^2 + 12^2}}$$

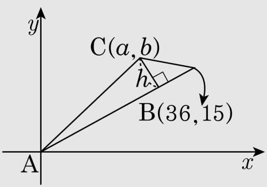
△ABC의 넓이 S는 $S = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h$

$$= \frac{1}{2} 3\sqrt{12^2 + 5^2} \cdot \frac{|5a - 12b|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{3}{2}|5a - 12b|$$

a, b는 정수이므로, $|5a - 12b| = 1$일 때,

S의 최소는 $\frac{3}{2}$

실제로 $(a, b) = (5, 2)$ 또는 $(7, 3)$일 때이다.



17. 점 $(a,\ b)$가 직선 $2x-y-2=0$ 위를 움직일 때, 점 $(a,\ a+b)$의 자취의 방정식은?

① $y=3x-2$ ② $y=4x-3$ ③ $y=5x-4$

④ $y=6x-5$ ⑤ $y=7x-6$

해설

$x=a\cdots$㉠

$y=a+b\cdots$㉡ 에서

a, b 를 소거한다.

점 (a, b)가 직선 $2x-y-2=0$ 위를

움직이므로 $2a-b-2=0$

$\therefore b=2a-2$ 이것을 ㉡에 대입하면

$y=3a-2$

$\therefore y=3x-2$ ($\because$ ㉠)

18. 두 점 A$(-1,\ 3)$, B$(3,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 P, y축 위의 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이를 구하면?

① 4　　② $\sqrt{5}$　　③ $2\sqrt{5}$　　④ $3\sqrt{5}$　　⑤ $4\sqrt{5}$

해설

P$(a,\ 0)$이라하면, $\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}}$

$(a+1)^2 + 3^2 = (a-3)^2 + 5^2$, $8a = 24$

$\therefore\ a = 3$

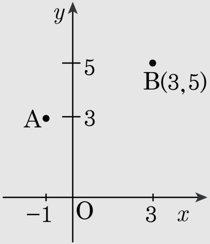
Q$(0,\ b)$이라 하면, $\overline{\mathrm{AQ}} = \overline{\mathrm{BQ}}$

$1^2 + (b-3)^2 = (-3)^2 + (b-5)^2$

$\therefore\ 4b = 24$

$\therefore\ b = 6$ P$(3,\ 0)$, Q$(0,\ 6)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$



19. 두 점 $\mathrm{A}(-2,\ 1)$, $\mathrm{B}(4,\ -3)$에서 같은 거리에 있고 직선 $y = 2x - 1$ 위에 있는 점 P의 좌표는?

① $(-3,\ -7)$　② $(-2,\ -5)$　③ $(3,\ 5)$
④ $(2,\ 3)$　⑤ $(2,\ 5)$

해설

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}^2 = \overline{\mathrm{BP}}^2$에서
$(a+2)^2 + (b-1)^2 = (a-4)^2 + (b+3)^2$
정리하면 $12a - 8b = 20$
$\therefore\ 3a - 2b = 5 \cdots$ ①
또, P는 $y = 2x - 1$ 위에 있으므로
$b = 2a - 1 \cdots$ ②
①, ② 를 연립하여 풀면 $a = -3,\ b = -7$

20. $\triangle$ABC에서 $\overline{\mathrm{AB}}=8$, $\overline{\mathrm{AC}}=x$이고, $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점을 M이라 할 때, $\overline{\mathrm{BM}}=7$, $\overline{\mathrm{AM}}=1$일 때, x의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=6$

해설

파포스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$이므로

$8^2+x^2=2(7^2+1^2)$

$\therefore\ x=\pm 6$

$x>0$이므로 $x=6$

21. 좌표평면 위에 두 점 $A(a, b)$, $B(-2,\ 2)$가 있다. 이 0때, $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a+2)^2+(b-2)^2}$의 최솟값은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

원점을 $O(0,\ 0)$이라 하면
$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a+2)^2+(b-2)^2}$
$=\overline{OA}+\overline{AB}$이므로
이 값이 최소가 되는 것은 세 점 O, A, B가 일직선 위에 있을 때이다.
따라서 $\overline{OA}+\overline{AB}$의 최소값은
$\overline{OB}=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$

22. 직선 $x+y=1$은 두 점, $\mathrm{A}(-2,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 7)$을 잇는 선분 AB를 어떤 비로 내분하는가?

① $3:2$ ② $2:3$ ③ $1:1$ ④ $2:1$ ⑤ $1:2$

해설

선분 AB를 $m\ :\ n$ 으로 내분하는 점을 P 라 하면,

점 P 의 좌표는

$$\left(\frac{m\cdot 0+n\cdot(-2)}{m+n},\ \frac{m\cdot 7+n\cdot 0}{m+n}\right)=\left(\frac{-2n}{m+n},\ \frac{7m}{m+n}\right)$$

그런데, 점 P 는 직선 $x+y=1$ 위의 점이므로 대입하면,

$$\frac{-2n}{m+n}+\frac{7m}{m+n}=1,\ -2n+7m=m+n,\ 2m=n$$

$\therefore\ m:n=1:2$

23. 세 점 $A(-2,\ 0)$, $B(-1,\ \sqrt{3})$, $C(1,\ -4)$ 를 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, $\triangle ABD$ 와 $\triangle ACD$ 의 넓이의 비는?

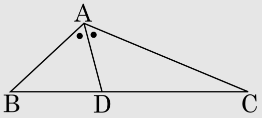
① 1 : 2 ② 1 : 3 ③ 1 : 4 ④ 2 : 3 ⑤ 2 : 5

해설

점 D 가 $\angle A$ 의 이등분선과 변 BC 의 교점이므로

$\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{AC} = \sqrt{1+3} : \sqrt{9+16} = 2 : 5$

$\therefore\ \triangle ABD : \triangle ACD = \overline{BD} : \overline{DC} = 2 : 5$



24. 다음 두 직선 $2x+y-2=0, mx-y-3m+5=0$ 이 제 1 사분면에서 만나도록 m 의 값의 범위는?

① $1<m<\frac{5}{2}$　② $1 \le m < \frac{5}{2}$　③ $1<m \le \frac{5}{2}$
④ $2<m<\frac{5}{2}$　⑤ $2 \le m < \frac{5}{2}$

해설

두 직선의 방정식을 연립하여 교점을 찾으면

$\Rightarrow \left(\frac{3m-3}{m+2}, \frac{-4m+10}{m+2}\right)$

교점이 1 사분면 위에 있으므로

i) $\frac{3(m-1)}{m+2} > 0$

$\Rightarrow m<-2$ 또는 $m>1$

ii) $\frac{2(2m-5)}{m+2} < 0$

$\Rightarrow -2<m<\frac{5}{2}$

i), ii) 의 공통영역을 구하면 $1<m<\frac{5}{2}$

해설

$2x+y-2=0$ 의 x, y 절편의 좌표를 각각 구하면 $(1, 0)$, $(0, 2)$ 이고 $y=m(x-3)+5$ 는 다음 그림과 같이 m 값에 관계없이 $(3, 5)$ 를 지나는 직선이다. $(0, 2)$ 를 대입하면 $m=1$, $(1, 0)$ 을 대입하면 $m=\frac{5}{2}$

$\therefore 1<m<\frac{5}{2}$