1. 두 점 $A(-3,\ 4)$, $B(1,\ -2)$ 를 지름의 양끝으로 하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x+1)^2+(y-1)^2=13$　② $(x-1)^2+(y+1)^2=13$
③ $(x-1)^2+(y+1)^2=10$　④ $(x+1)^2+(y-1)^2=10$
⑤ $(x+1)^2+(y-1)^2=9$

해설

$A(-3,\ 4)$, $B(1,\ -2)$가 지름의 양 끝점이므로
$\overline{AB}$ 의 중점이 원의 중심 $O(-1,\ 1)$ 이고,
$\frac{1}{2}\overline{AB}=\overline{OA}=\overline{OB}=r$
반지름 $r=\overline{OA}=\sqrt{(-3+1)^2+(4-1)^2}$
$=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$
$\therefore$ 원의 방정식은 $(x+1)^2+(y-1)^2=13$

2. 이차방정식 $x^2+y^2+kx-2ky+k^2+k=0$ 의 그래프가 원을 나타내도록 상수 k 값의 범위를 구하면?

① $0 \le k \le 4$　② $\frac{1}{4} \le k \le 4$

③ $0 < k < 4$　④ $k \le 0$ 또는 $k \ge 4$

⑤ $k < 0$ 또는 $k > 4$

해설

$$\left(x+\frac{k}{2}\right)^2 + (y-k)^2 = \frac{k^2}{4} - k$$

원이 되려면 $\frac{k^2}{4} - k > 0$ 이 성립해야 한다.

$\Rightarrow \quad \frac{1}{4}(k-4)k > 0$

$\Rightarrow \quad k < 0$ 또는 $k > 4$

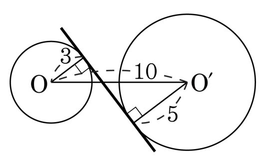
3. 두 원 $(x+1)^2+y^2=1$, $x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 의 공통접선의 개수는?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$(x+1)^2+y^2=1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라
하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1,\ 0)$ 이고
반지름의 길이는 1 이다.
$x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 에서
$(x-3)^2+(y-3)^2=16$ 이므로
이 원의 중심을 C_2 이라 하면
점 C_2 의 좌표는 $(3,\ 3)$ 이고
반지름의 길이는 4 이다.
$\overline{C_1C_2}=5$ 이고
두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로
두 원은 서로 외접하게 된다.
따라서 공통접선은 3 개이다.

4. 다음 그림의 두 원 O와 O′ 에서 공통내접선의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

공통내접선의 길이는 $\sqrt{10^2 - (3+5)^2} = 6$

5. 중심이 원점이고, 직선 $2x-y+5=0$ 에 접하는 원의 반지름의 길이는?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름의 길이 r 는 원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $2x-y+5=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$r = \frac{|0+0+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \sqrt{5}$$

6. 임의의 실수 a에 대하여 원 $x^2+y^2+ax+(a+2)y-(2a+4)=0$ 은 두 정점 A, B 를 지난다. 이 때 선분 AB 의 중점의 좌표를 구하면?

① $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$　　② $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$　　③ $\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$
④ $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$　　⑤ $\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

해설

$x^2+y^2+ax+(a+2)y-(2a+4)=0$
$\Rightarrow x^2+y^2+2y-4+a(x+y-2)=0$
$\Rightarrow x^2+y^2+2y-4=0 \cdots\cdots$ ①
이고 $x+y-2=0 \cdots\cdots$ ②
② 에서 $y=-x+2$ 를 ① 에 대입하면
$x^2+(-x+2)^2+2(-x+2)-4=0$ 이를 정리하면
$2x^2-6x+4=0,\ x^2-3x+2=0$
$\therefore x=2,\ y=0\ ,\ x=1,\ y=1$
$\therefore$ A$(2,\ 0)$, B$(1,\ 1)$
$\therefore$ A, B 의 중점의 좌표 $=\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

7. 세 점$(-3,\ 1)$, $(5,\ 5)$, $(-2, 2)$ 를 꼭지점으로 하는 삼각형의 외접원의 중심(외심)의 좌표를 구하면?

① $(3,\ -1)$　　② $(2,\ 1)$　　③ $(4,\ 2)$

④ $(-3,\ -2)$　　⑤ $(3,\ -2)$

해설

외접원의 방정식을

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \cdots$ ㉠ 이라 하면,

㉠은 $(-3,\ 1)$, $(5,\ 5)$, $(-2,\ -2)$를 지나므로

$$\begin{cases} 10 - 3A + B + C = 0 \\ 50 + 5A + 5B + C = 0 \\ 8 - 2A - 2B + C = 0 \end{cases}$$

세 식을 연립하여 풀면

$A = -4,\ \ B = -2\ ,\ C = -20$

따라서, 구하는 원은 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$

즉, $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$ 이고 중심은 $(2,\ 1)$

8. 중심이 x 축 위에 있고 두 점 $(-1,\ 4)$, $(6,\ 3)$ 을 지나는 원의 방정식은?

① $(x-2)^2+y^2=5$　　② $(x+2)^2+y^2=5$

③ $(x-2)^2+y^2=25$　　④ $(x+1)^2+y^2=25$

⑤ $(x+2)^2+y^2=25$

해설

원의 중심의 좌표를 $(a,\ 0)$,
반지름의 길이를 r 라 하면,
원의 방정식은 $(x-a)^2+y^2=r^2$ ⋯ ㉠
이 원이 두 점 $(-1,\ 4)$, $(6,\ 3)$ 을 지나므로,
$x=-1,\ y=4$ 를 ㉠ 에 대입하면,
$(-1-a)^2+4^2=r^2$
$\therefore\ a^2+2a+17=r^2$ ⋯ ㉡
$x=6,\ y=3$ 을 ㉠ 에 대입하면,
$(6-a)^2+3^2=r^2$
$\therefore\ a^2-12a+45=r^2$ ⋯ ㉢
㉡ − ㉢ 을 하면, $14a-28=0$,　$\therefore\ a=2$
$a=2$ 를 ㉡ 에 대입하면, $r^2=25$
따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-2)^2+y^2=25$

9. 원 $x^2+y^2+2ax-4ay+20a-25=0$ 의 넓이가 최소일 때, 이 원의 중심의 좌표가 (p,q) 이다. 이 때 $p-q$ 의 값은?

① -6　　② -4　　③ -2　　④ 2　　⑤ 4

해설

$x^2+y^2+2ax-4ay+20a-25=0$ 을
표준형으로 고치면
$(x+a)^2+(y-2a)^2=5a^2-20a+25$
이 원의 넓이는
$\pi(5a^2-20a+25)=5\pi(a-2)^2+5\pi$
따라서 $a=2$ 일 때 넓이가 최소.
중심은 $(-2,4)$
$\therefore p=-2,\ q=4$
$\therefore p-q=-6$

10. 점 $(1,\ 1)$을 지나고, x축과 y축을 동시에 접하는 원은 두 개 존재한다. 이 때, 두 원의 중심거리는 얼마인가?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{6}$ ⑤ 4

해설

x 축, y 축 동시에 접하는 원 :

$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$

$(1,1)$ 을 지나므로, $(1-a)^2+(1-a)^2=a^2$

$\Rightarrow \quad a^2-4a+2=0$

두 근을 α,β 라 하면,

$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=2$

두 원의 중심거리 :

$$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{2\left\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\right\}}$$
$$=\sqrt{2(4^2-8)}=4$$

11. 두 정점 $\mathrm{A}(-3,\ 0)$, $\mathrm{B}(2,\ 0)$ 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{BP}} = 3 : 2$ 인 점 P 의 자취의 길이를 구하면?

① 12π　② 16π　③ 32π　④ 36π　⑤ 64π

해설

점 P 의 자취는 $\overline{\mathrm{AB}}$ 를 $3 : 2$ 로 내분하는 점과 외분하는 점을 지름의 끝으로 가지는 원의 방정식과 같다.

$\Rightarrow$ 내분점은 $\left(\dfrac{3\times 2+2\times(-3)}{5},\ 0\right) = (0,0)$ 이고,

외분점은 $\left(\dfrac{3\times 2-2\times(-3)}{1},\ 0\right) = (12,0)$ 이다.

$\therefore$ 반지름은 6 이고, 중심이 $(6,\ 0)$ 인 원

$\therefore$ 자취의 길이는 $2\times\pi\times 6 = 12\pi$

12. 두 원 $x^2+y^2-4x=0,\ x^2+y^2-6x-2y+8=0$의 교점과 점 $(1,\ 0)$을 지나는 원의 방정식은?

① $x^2+y^2-2x-3y+1=0$
② $x^2+y^2-5x-y+4=0$
③ $x^2+y^2-6x-4y+5=0$
④ $x^2+y^2+4x+2y+2=0$
⑤ $x^2+y^2-5x+4y+3=0$

해설

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은
$x^2+y^2-4x+k\left(x^2+y^2-6x-2y+8\right)=0$
($k\neq-1$인 실수)
이 원이 점 $(1,0)$을 지나므로
$1-4+k(1-6+8)=0$
$-3+3k=0 \quad \therefore k=1$
따라서, 주어진 두 원의 교점을 지나는
원의 방정식은
$x^2+y^2-4x+x^2+y^2-6x-2y+8=0$
$\therefore x^2+y^2-5x-y+4=0$

13. 실수 a, b 와 두 원
A : $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2+1$,
B : $(x+1)^2+(y-1)^2=3$ 에 대하여
원 A 가 원 B 의 둘레를 이등분하면서 지날 때, a, b 사이의 관계식 은?

① $a+b=-3$　② $a-b=-2$　③ $a-b=-1$

④ $a^2+b^2=1$　⑤ $a^2+b^2=2$

해설

원A 가 원B 의 둘레를 이등분하므로
두 원의 공통현이
원B 의 중심인 $(-1,\ 1)$ 을 지나야 한다.
공통현의 방정식은
$(a+1)x+(b-1)y=0\cdots\cdots$ ㉠
㉠이 점 $(-1,\ 1)$ 을 지나므로
$(a+1)\times(-1)+(b-1)\times 1=0$
$\therefore\ a-b=-2$

14. 직선 $y = x + n$ 과 원 $x^2 + y^2 = 8$ 이 만나지 않도록 하는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(0, 0)$ 에서 직선 $y = x + n$ 까지의 거리가 반지름의 길이 $2\sqrt{2}$ 보다 크면 된다.

$\frac{|n|}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{2}$

$\therefore n > 4$ ($\because n$ 은 자연수)

$\therefore$ 최소의 n 은 5 이다.

15. 원 $x^2+y^2=1$ 과 직선 $x+y=k$ 이 서로 다른 두 점에서 만나도록 k 의 값의 범위를 구하면?

① $-\sqrt{3}<k<\sqrt{3}$ ② $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$ ③ $-1<k<1$

④ $-2<k<2$ ⑤ $-3<k<3$

해설

원과 직선이 두점에서 만난다면, 직선과 원의 중심사이의 거리인 d가 반지름 r보다 작아야 한다.

즉 $d<r$이므로

$$\frac{|-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}<1$$

$\Rightarrow |-k|<\sqrt{2}$

$\therefore -\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$

16. 제1 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 r 인 원의 중심을 C_1, 제2 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}r$ 인 원의 중심을 C_2, 제3 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}r$ 인 원의 중심을 C_3, 제4 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{8}r$ 인 원의 중심을 C_4 라 하자.
$\overline{\mathrm{C_1C_2}} + \overline{\mathrm{C_2C_3}} + \overline{\mathrm{C_3C_4}} = 14\sqrt{10}$ 일 때, r 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$\mathrm{C_1}\,(r, r)$, $\mathrm{C_2}\left(-\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}r\right)$,

$\mathrm{C_3}\left(-\frac{1}{4}r, -\frac{1}{4}r\right)$, $\mathrm{C_4}\left(\frac{1}{8}r, -\frac{1}{8}r\right)$ 이므로

$$\overline{\mathrm{C_1C_2}} + \overline{\mathrm{C_2C_3}} + \overline{\mathrm{C_3C_4}}$$
$$= \sqrt{\left(-\frac{3}{2}r\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}r\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4}r\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}r\right)^2}$$
$$+ \sqrt{\left(\frac{3}{8}r\right)^2 + \left(\frac{1}{8}r\right)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{10}}{2}r + \frac{\sqrt{10}}{4}r + \frac{\sqrt{10}}{8}r$$
$$= \frac{7\sqrt{10}}{8}r = 14\sqrt{10}$$
$$\therefore r = 16$$

17. 두 정점 $A(-\sqrt{2},\ 0)$, $B(\sqrt{2},\ 0)$ 가 있다. 조건 $2\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 9$ 를 만족시키는 점 $P(x,\ y)$ 의 자취는 원이다. 이 원의 반지름은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$2\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 9$

$2\left\{(x+\sqrt{2})^2+y^2\right\} - \left\{(x-\sqrt{2})^2+y^2\right\} = 9$

이것을 정리하면, $(x+3\sqrt{2})^2+y^2=25$

점 P 의 자취는 점 $(-3\sqrt{2},\ 0)$ 을 중심으로 하고,

반지름이 5 인 원이다.

18. 원 $x^2+y^2-2x-8y+13=0$ 에 외접하고, 동시에 점 $(-2,\ 0)$ 에서 x 축에 접하는 원의 둘레의 길이는?

① $\frac{14}{3}\pi$　② 5π　③ $\frac{16}{3}\pi$　④ $\frac{7}{2}\pi$　⑤ $\frac{15}{4}\pi$

해설

x 축에 접하는 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$
$(-2,\ 0)$ 을 지나므로
$(-2-a)^2+b^2=b^2 \Rightarrow a=-2$
$(x+2)^2+(y-b)^2=b^2$
$(x-1)^2+(y-4)^2=4$ 에 외접하므로 중심 사이의 거리는 반지름의 길이 합과 같다.
$\Rightarrow \sqrt{(1+2)^2+(4-b)^2}=b+2$
$\Rightarrow b=\frac{7}{4}$
$\therefore 2\cdot\pi\cdot\frac{7}{4}=\frac{7}{2}\pi$

19. 세 원 $x^2+y^2-4x-4y+4=0$, $x^2+y^2-8x-6y+16=0$, $(x-a)^2+(y-b)^2=25$ 를 각각 C_1, C_2, C_3 라고 하자. 이 때, C_1, C_2 의 공통현과 C_1, C_3 의 공통현이 일치하도록 하는 양수 a, b 의 값에 대하여 $a-b$ 의 값은?

① $\frac{\sqrt{95}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{101}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{105}}{5}$
④ $\frac{\sqrt{110}}{5}$ ⑤ $\frac{\sqrt{115}}{5}$

해설

두 원 C_1, C_2 의 공통현의 방정식은
$(x^2+y^2-4x-4y+4)-(x^2+y^2-8x-6y+16)=0$
$\therefore 2x+y-6=0 \cdots\cdots$ ㉠
원 C_3 의 방정식을 변형하면
$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-25=0$ 이고,
두 원 C_1, C_3 의 공통현의 방정식은
$(2a-4)x+(2b-4)y-(a^2+b^2-29)=0 \cdots$ ㉡
두 직선 ㉠, ㉡이 일치하므로
$\frac{2a-4}{2}=\frac{2b-4}{1}=\frac{a^2+b^2-29}{6}$
$\frac{2a-4}{2}=\frac{2b-4}{1}$ 에서 $2a-4=4b-8$
$\therefore a=2b-2 \cdots\cdots$ ㉢
$\frac{2b-4}{1}=\frac{a^2+b^2-29}{6}$ 에 ㉢을 대입하면
$12b-24=(2b-2)^2+b^2-29$
$5b^2-20b-1=0$
$\therefore b=\frac{10\pm\sqrt{105}}{5}$
그런데 $b>0$ 이므로 $b=\frac{10+\sqrt{105}}{5}$
$\therefore a-b=\frac{\sqrt{105}}{5}$

20. 두 원 $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2-6x-6y=7$의 공통현의 길이를 구하면?

① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$　④ 2　⑤ 3

해설

$x^2+y^2=1$은 중심이 원점이고 반지름이 1인 원이다.
$x^2+y^2-6x-6y=7$은 중심이 $(3,3)$이고 반지름이 5인 원이다.
공통현의 방정식은
$(x^2+y^2-1)-(x^2+y^2-6x-6y-7)=0$
$\therefore\ x+y+1=0$
이때, $x^2+y^2=1$의 원과 $x+y+1=0$의 교점을 구하면
$(0,\ -1)$, $(-1,\ 0)$에서 접하여 공통현의 길이는 $\sqrt{2}$이다.

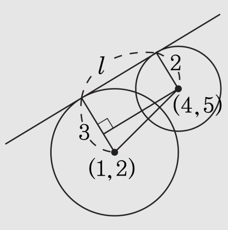
21. 두 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=9,\ (x-4)^2+(y-5)^2=4$ 의 공통접선의 길이는?

① 4 ② $\sqrt{17}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{19}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

해설

두 원의 중심거리와 반지름의 차를 이용하여 구한다.

$\therefore\ l = \sqrt{(4-1)^2+(5-2)^2-1^2} = \sqrt{17}$



22. 두 원 $(x-a)^2+(y-2)^2=9$, $(x-1)^2+(y+a)^2=1$이 직교할 때 a의 값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

두 원의 중심이 각각 $(a,\ 2)$, $(1,\ -a)$이므로
두 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(a-1)^2+(2+a)^2}$이다.
두 원의 반지름은 각각 $3,\ 1$이므로
직교하기 위한 조건은
$(a-1)^2+(2+a)^2=3^2+1^2$
$\therefore\ 2a^2+2a-5=0$
근과 계수와의 관계로부터 두 근의 합은 -1