

1. 두 점 A(-3, 4), B(1, -2) 를 지름의 양끝으로 하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 13$

② $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 13$

③ $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 10$

④ $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 10$

⑤ $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 9$

해설

A(-3, 4), B(1, -2)가 지름의 양 끝점이므로
 $\overline{AB}$ 의 중점이 원의 중심 O(-1, 1) 이고,

$$\frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{OA} = \overline{OB} = r$$

$$\begin{aligned}\text{반지름 } r &= \overline{OA} = \sqrt{(-3+1)^2 + (4-1)^2} \\ &= \sqrt{4+9} = \sqrt{13}\end{aligned}$$

∴ 원의 방정식은 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 13$

2. 이차방정식 $x^2 + y^2 + kx - 2ky + k^2 + k = 0$ 의 그래프가 원을 나타내도록 상수 k 값의 범위를 구하면?

① $0 \leq k \leq 4$

② $\frac{1}{4} \leq k \leq 4$

③ $0 < k < 4$

④ $k \leq 0$ 또는 $k \geq 4$

⑤ $k < 0$ 또는 $k > 4$

해설

$$\left(x + \frac{k}{2}\right)^2 + (y - k)^2 = \frac{k^2}{4} - k$$

원이 되려면 $\frac{k^2}{4} - k > 0$ 이 성립해야 한다.

$$\Rightarrow \frac{1}{4}(k - 4)k > 0$$

$$\Rightarrow k < 0 \text{ 또는 } k > 4$$

3. 두 원 $(x+1)^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ 의 공통접선의 개수는?

① 0개

② 1개

③ 2개

④ 3개

⑤ 4개

해설

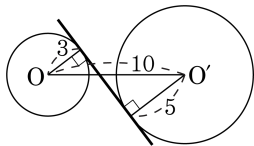
$(x+1)^2 + y^2 = 1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라
하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1, 0)$ 이고
반지름의 길이는 1 이다.

$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ 에서
 $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 16$ 이므로
이 원의 중심을 C_2 이라 하면
점 C_2 의 좌표는 $(3, 3)$ 이고
반지름의 길이는 4 이다.

$\overline{C_1 C_2} = 5$ 이고

두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로
두 원은 서로 외접하게 된다.
따라서 공통접선은 3 개이다.

4. 다음 그림의 두 원 O와 O'에서 공통내접선의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

공통내접선의 길이는 $\sqrt{10^2 - (3 + 5)^2} = 6$

5. 중심이 원점이고, 직선 $2x - y + 5 = 0$ 에 접하는 원의 반지름의 길이는?

① 1

② $\sqrt{2}$

③ $\sqrt{3}$

④ 2

⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름의 길이 r 는 원의 중심 $(0, 0)$ 과
직선 $2x - y + 5 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$r = \frac{|0 + 0 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$$

6. 임의의 실수 a 에 대하여 원 $x^2 + y^2 + ax + (a+2)y - (2a+4) = 0$ 은 두 정점 A, B 를 지난다. 이 때 선분 AB 의 중점의 좌표를 구하면?

① $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

② $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

③ $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

④ $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

⑤ $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

해설

$$x^2 + y^2 + ax + (a+2)y - (2a+4) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2y - 4 + a(x+y-2) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2y - 4 = 0 \dots\dots ①$$

$$\text{이고 } x+y-2=0 \dots\dots ②$$

② 에서 $y = -x + 2$ 를 ① 에 대입하면

$$x^2 + (-x+2)^2 + 2(-x+2) - 4 = 0 \text{ 이를 정리하면}$$

$$2x^2 - 6x + 4 = 0, x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\therefore x = 2, y = 0, x = 1, y = 1$$

$$\therefore A(2, 0), B(1, 1)$$

$$\therefore A, B \text{ 의 중점의 좌표} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

7. 세 점 $(-3, 1)$, $(5, 5)$, $(-2, 2)$ 를 꼭지점으로 하는 삼각형의 외접원의 중심(외심)의 좌표를 구하면?

① $(3, -1)$

② $(2, 1)$

③ $(4, 2)$

④ $(-3, -2)$

⑤ $(3, -2)$

해설

외접원의 방정식을

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \cdots \textcircled{1} \text{ 이라 하면,}$$

①은 $(-3, 1)$, $(5, 5)$, $(-2, -2)$ 를 지나므로

$$\begin{cases} 10 - 3A + B + C = 0 \\ 50 + 5A + 5B + C = 0 \\ 8 - 2A - 2B + C = 0 \end{cases}$$

세 식을 연립하여 풀면

$$A = -4, B = -2, C = -20$$

따라서, 구하는 원은 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$

즉, $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ 이고 중심은 $(2, 1)$

8. 중심이 x 축 위에 있고 두 점 $(-1, 4)$, $(6, 3)$ 을 지나는 원의 방정식은?

① $(x-2)^2 + y^2 = 5$

② $(x+2)^2 + y^2 = 5$

③ $(x-2)^2 + y^2 = 25$

④ $(x+1)^2 + y^2 = 25$

⑤ $(x+2)^2 + y^2 = 25$

해설

원의 중심의 좌표를 $(a, 0)$,

반지름의 길이를 r 라 하면,

원의 방정식은 $(x-a)^2 + y^2 = r^2 \cdots \textcircled{1}$

이 원이 두 점 $(-1, 4)$, $(6, 3)$ 을 지나므로,

$x = -1$, $y = 4$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면,

$$(-1-a)^2 + 4^2 = r^2$$

$$\therefore a^2 + 2a + 17 = r^2 \cdots \textcircled{2}$$

$x = 6$, $y = 3$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면,

$$(6-a)^2 + 3^2 = r^2$$

$$\therefore a^2 - 12a + 45 = r^2 \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2} - \textcircled{3}$ 을 하면, $14a - 28 = 0$, $\therefore a = 2$

$a = 2$ 를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면, $r^2 = 25$

따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-2)^2 + y^2 = 25$

9. 원 $x^2 + y^2 + 2ax - 4ay + 20a - 25 = 0$ 의 넓이가 최소일 때, 이 원의 중심의 좌표가 (p, q) 이다. 이 때 $p - q$ 의 값은?

① -6

② -4

③ -2

④ 2

⑤ 4

해설

$x^2 + y^2 + 2ax - 4ay + 20a - 25 = 0$ 을
표준형으로 고치면

$$(x + a)^2 + (y - 2a)^2 = 5a^2 - 20a + 25$$

이 원의 넓이는

$$\pi(5a^2 - 20a + 25) = 5\pi(a - 2)^2 + 5\pi$$

따라서 $a = 2$ 일 때 넓이가 최소.

중심은 $(-2, 4)$

$$\therefore p = -2, q = 4$$

$$\therefore p - q = -6$$

10. 점 (1, 1)을 지나고, x 축과 y 축을 동시에 접하는 원은 두 개 존재한다.
이 때, 두 원의 중심거리는 얼마인가?

① $\sqrt{2}$

② $\sqrt{3}$

③ 2

④ $\sqrt{6}$

⑤ 4

해설

x 축, y 축 동시에 접하는 원 :

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$$

$$(1,1) \text{ 을 지나므로, } (1-a)^2 + (1-a)^2 = a^2$$

$$\Rightarrow a^2 - 4a + 2 = 0$$

두 근을 α, β 라 하면,

$$\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = 2$$

두 원의 중심거리 :

$$\begin{aligned}\sqrt{(\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2} &= \sqrt{2 \{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\}} \\ &= \sqrt{2(4^2 - 8)} = 4\end{aligned}$$

11. 두 정점 $A(-3, 0)$, $B(2, 0)$ 에 대하여 $\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 2$ 인 점 P 의 자취의 길이를 구하면?

① 12π

② 16π

③ 32π

④ 36π

⑤ 64π

해설

점 P 의 자취는 $\overline{AB}$ 를 $3 : 2$ 로 내분하는 점과 외분하는 점을 지름의 끝으로 가지는 원의 방정식과 같다.

$\Rightarrow$ 내분점은 $\left(\frac{3 \times 2 + 2 \times (-3)}{5}, 0 \right) = (0, 0)$ 이고,

외분점은 $\left(\frac{3 \times 2 - 2 \times (-3)}{1}, 0 \right) = (12, 0)$ 이다.

$\therefore$ 반지름은 6 이고, 중심이 $(6, 0)$ 인 원

$\therefore$ 자취의 길이는 $2 \times \pi \times 6 = 12\pi$

12. 두 원 $x^2 + y^2 - 4x = 0$, $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$ 의 교점과 점 $(1, 0)$ 을 지나는 원의 방정식은?

① $x^2 + y^2 - 2x - 3y + 1 = 0$

② $x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0$

③ $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 5 = 0$

④ $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 2 = 0$

⑤ $x^2 + y^2 - 5x + 4y + 3 = 0$

해설

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 4x + k(x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8) = 0$$

($k \neq -1$ 인 실수)

이 원이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$1 - 4 + k(1 - 6 + 8) = 0$$

$$-3 + 3k = 0 \quad \therefore k = 1$$

따라서, 주어진 두 원의 교점을 지나는

원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 4x + x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0$$

13. 실수 a, b 와 두 원

$$A : (x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 + 1,$$

$$B : (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 3 \text{ 에 대하여}$$

원 A 가 원 B 의 둘레를 이등분하면서 지날 때, a, b 사이의 관계식은?

① $a + b = -3$

② $a - b = -2$

③ $a - b = -1$

④ $a^2 + b^2 = 1$

⑤ $a^2 + b^2 = 2$

해설

원A 가 원B 의 둘레를 이등분하므로

두 원의 공통현이

원B 의 중심인 $(-1, 1)$ 을 지나야 한다.

공통현의 방정식은

$$(a + 1)x + (b - 1)y = 0 \dots\dots \textcircled{1}$$

① 이 점 $(-1, 1)$ 을 지나므로

$$(a + 1) \times (-1) + (b - 1) \times 1 = 0$$

$$\therefore a - b = -2$$

14. 직선 $y = x + n$ 과 원 $x^2 + y^2 = 8$ 이 만나지 않도록 하는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(0, 0)$ 에서 직선 $y = x + n$ 까지의 거리가
반지름의 길이 $2\sqrt{2}$ 보다 크면 된다.

$$\frac{|n|}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{2}$$

$\therefore n > 4$ ($\because n$ 은 자연수)

$\therefore$ 최소의 n 은 5이다.

15. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 직선 $x + y = k$ 이 서로 다른 두 점에서 만나도록 k 의 값의 범위를 구하면?

① $-\sqrt{3} < k < \sqrt{3}$

② $-\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$

③ $-1 < k < 1$

④ $-2 < k < 2$

⑤ $-3 < k < 3$

해설

원과 직선이 두점에서 만난다면, 직선과 원의 중심사이의 거리인 d 가 반지름 r 보다 작아야 한다.

즉 $d < r$ 이므로

$$\frac{|-k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} < 1$$

$$\Rightarrow |-k| < \sqrt{2}$$

$$\therefore -\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$$

16. 제1 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 r 인 원의 중심을 C_1 , 제2 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}r$ 인 원의 중심을 C_2 , 제3 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}r$ 인 원의 중심을 C_3 , 제4 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{8}r$ 인 원의 중심을 C_4 라 하자.

$\overline{C_1C_2} + \overline{C_2C_3} + \overline{C_3C_4} = 14\sqrt{10}$ 일 때, r 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$C_1(r, r), C_2\left(-\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}r\right),$$

$$C_3\left(-\frac{1}{4}r, -\frac{1}{4}r\right), C_4\left(\frac{1}{8}r, -\frac{1}{8}r\right) \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} & \overline{C_1C_2} + \overline{C_2C_3} + \overline{C_3C_4} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{3}{2}r\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}r\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4}r\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}r\right)^2} \\ & \quad + \sqrt{\left(\frac{3}{8}r\right)^2 + \left(\frac{1}{8}r\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{2}r + \frac{\sqrt{10}}{4}r + \frac{\sqrt{10}}{8}r \\ &= \frac{7\sqrt{10}}{8}r = 14\sqrt{10} \\ &\therefore r = 16 \end{aligned}$$

17. 두 점 $A(-\sqrt{2}, 0)$, $B(\sqrt{2}, 0)$ 가 있다. 조건 $2\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 9$ 를 만족시키는 점 $P(x, y)$ 의 자취는 원이다. 이 원의 반지름은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$$2\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 9$$

$$2\{(x + \sqrt{2})^2 + y^2\} - \{(x - \sqrt{2})^2 + y^2\} = 9$$

$$\text{이것을 정리하면, } (x + 3\sqrt{2})^2 + y^2 = 25$$

점 P 의 자취는 점 $(-3\sqrt{2}, 0)$ 을 중심으로 하고,
반지름이 5 인 원이다.

18. 원 $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 13 = 0$ 에 외접하고, 동시에 점 $(-2, 0)$ 에서 x 축에 접하는 원의 둘레의 길이는?

① $\frac{14}{3}\pi$

② 5π

③ $\frac{16}{3}\pi$

④ $\frac{7}{2}\pi$

⑤ $\frac{15}{4}\pi$

해설

x 축에 접하는 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = b^2$$

$(-2, 0)$ 을 지나므로

$$(-2-a)^2 + b^2 = b^2 \Rightarrow a = -2$$

$$(x+2)^2 + (y-b)^2 = b^2$$

$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 4$ 에 외접하므로 중심 사이의 거리는 반지름의 길이 합과 같다.

$$\Rightarrow \sqrt{(1+2)^2 + (4-b)^2} = b+2$$

$$\Rightarrow b = \frac{7}{4}$$

$$\therefore 2 \cdot \pi \cdot \frac{7}{4} = \frac{7}{2}\pi$$

19. 세 원 $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$, $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 25$ 를 각각 C_1, C_2, C_3 라고 하자. 이 때, C_1, C_2 의 공통현과 C_1, C_3 의 공통현이 일치하도록 하는 양수 a, b 의 값에 대하여 $a - b$ 의 값은?

① $\frac{\sqrt{95}}{5}$
④ $\frac{\sqrt{110}}{5}$

② $\frac{\sqrt{101}}{5}$
⑤ $\frac{\sqrt{115}}{5}$

③ $\frac{\sqrt{105}}{5}$

해설

두 원 C_1, C_2 의 공통현의 방정식은

$$(x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4) - (x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16) = 0$$

$$\therefore 2x + y - 6 = 0 \dots\dots \textcircled{\Gamma}$$

원 C_3 의 방정식을 변형하면

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - 25 = 0 \text{ 이고,}$$

두 원 C_1, C_3 의 공통현의 방정식은

$$(2a - 4)x + (2b - 4)y - (a^2 + b^2 - 29) = 0 \dots \textcircled{\text{L}}$$

두 직선 $\textcircled{\Gamma}, \textcircled{\text{L}}$ 이 일치하므로

$$\frac{2a - 4}{2} = \frac{2b - 4}{1} = \frac{a^2 + b^2 - 29}{6}$$

$$\frac{2a - 4}{2} = \frac{2b - 4}{1} \text{ 에서 } 2a - 4 = 4b - 8$$

$$\therefore a = 2b - 2 \dots\dots \textcircled{\ominus}$$

$$\frac{2b - 4}{1} = \frac{a^2 + b^2 - 29}{6} \text{ 에 } \textcircled{\ominus} \text{ 을 대입하면}$$

$$12b - 24 = (2b - 2)^2 + b^2 - 29$$

$$5b^2 - 20b - 1 = 0$$

$$\therefore b = \frac{10 \pm \sqrt{105}}{5}$$

$$\text{그런데 } b > 0 \text{ 이므로 } b = \frac{10 + \sqrt{105}}{5}$$

$$\therefore a - b = \frac{\sqrt{105}}{5}$$

20. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 6x - 6y = 7$ 의 공통현의 길이를 구하면?

① 1

② $\sqrt{2}$

③ $\sqrt{3}$

④ 2

⑤ 3

해설

$x^2 + y^2 = 1$ 은 중심이 원점이고 반지름이 1인 원이다.

$x^2 + y^2 - 6x - 6y = 7$ 은 중심이 (3, 3)이고 반지름이 5인 원이다.

공통현의 방정식은

$$(x^2 + y^2 - 1) - (x^2 + y^2 - 6x - 6y - 7) = 0$$

$$\therefore x + y + 1 = 0$$

이때, $x^2 + y^2 = 1$ 의 원과 $x + y + 1 = 0$ 의 교점을 구하면

(0, -1), (-1, 0)에서 접하여 공통현의 길이는 $\sqrt{2}$ 이다.

21. 두 원 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$, $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 4$ 의 공통접선의 길이는?

① 4

② $\sqrt{17}$

③ $3\sqrt{2}$

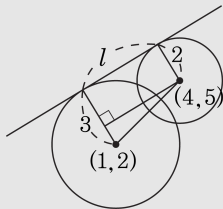
④ $\sqrt{19}$

⑤ $2\sqrt{5}$

해설

두 원의 중심거리와 반지름의 차를 이용하여 구한다.

$$\therefore l = \sqrt{(4-1)^2 + (5-2)^2 - 1^2} = \sqrt{17}$$



22. 두 원 $(x-a)^2 + (y-2)^2 = 9$, $(x-1)^2 + (y+a)^2 = 1$ 이 직교할 때 a 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

두 원의 중심이 각각 $(a, 2)$, $(1, -a)$ 이므로

두 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(a-1)^2 + (2+a)^2}$ 이다.

두 원의 반지름은 각각 3, 1이므로

직교하기 위한 조건은

$$(a-1)^2 + (2+a)^2 = 3^2 + 1^2$$

$$\therefore 2a^2 + 2a - 5 = 0$$

근과 계수와의 관계로부터 두 근의 합은 -1