

1. 두 분수 $\frac{21}{16}$, $\frac{35}{24}$ 의 어느 것에 곱하여도 그 결과가 자연수가 되게 하는 분수 중에서 가장 작은 분수를 구하여라.

- ① $\frac{8}{7}$ ② $\frac{48}{7}$ ③ $\frac{8}{105}$ ④ $\frac{48}{105}$ ⑤ $\frac{1}{35}$

해설

구하려는 분수를 $\frac{b}{a}$ 라고 하자.

$$\frac{21}{16} \times \frac{b}{a} = (\text{자연수}) \rightarrow \begin{cases} b \text{는 } 16 \text{의 배수} \\ a \text{는 } 21 \text{의 약수} \end{cases}$$

$$\frac{35}{24} \times \frac{b}{a} = (\text{자연수}) \rightarrow \begin{cases} b \text{는 } 24 \text{의 배수} \\ a \text{는 } 35 \text{의 약수} \end{cases}$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{(16, 24 \text{의 공배수})}{(21, 35 \text{의 공약수})} \dots \text{㉠ 이다.}$$

㉠을 만족하는 가장 작은 분수

$$\frac{b}{a} = \frac{(16, 24 \text{의 최소공배수})}{(21, 35 \text{의 최대공약수})}$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{48}{7}$$

2. 희정이는 1 과 100 사이의 자연수 중에서 $\frac{1}{3}$ 을 곱하여도, $\frac{1}{8}$ 을 곱하여도 항상 자연수가 되는 수가 모두 몇 개인가를 조사하려고 한다. 희정이가 찾은 자연수는 모두 몇 개인가?
- ① 3 개 ② 4 개 ③ 5 개 ④ 6 개 ⑤ 7 개

해설

구하는 수를 a 라 하면
 $\frac{1}{3} \times a = (\text{자연수})$, $\frac{1}{8} \times a = (\text{자연수})$ 가 되는 a 는 3 과 8 의 공배수이므로,
3 과 8 의 최소공배수는 24
따라서 24, 48, 72, 96 의 4 개

3. 두 수 $2^3 \times 5^a \times 7$, $2^4 \times 5^5 \times 7^b$ 의 최대공약수가 $2^3 \times 5^3 \times 7$, 최소공배수가 $2^4 \times 5^5 \times 7^3$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

최대공약수가 $2^3 \times 5^3 \times 7$ 이므로 $a = 3$,
최소공배수가 $2^4 \times 5^5 \times 7^3$ 이므로 $b = 3$
따라서 $a + b = 6$ 이다.

4. 5로 나누면 4가 남고, 6로 나누면 5가 남고, 8로 나누면 7이 남는 자연수 중에서 세 번째로 작은 값은?

① 119 ② 120 ③ 239 ④ 240 ⑤ 359

해설

구하는 수는 (5, 6, 8의 공배수)-1이고,
5, 6, 8의 최소공배수는 120이다.
120의 배수는 120, 240, 360 ... 이고,
구하는 자연수는 119, 239, 359 ... 이다.
따라서 세 번째로 작은 자연수는 359이다.

5. 가로가 15cm , 세로가 18cm 인 타일이 여러 장 있다. 이 타일들을 이어 붙여서 가장 작은 정사각형 모양을 만들려고 한다. 타일은 모두 몇 장 필요한가?

① 15장 ② 20장 ③ 25장 ④ 30장 ⑤ 35장

해설

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 15 \ 18} \\ \underline{5 \quad 6} \end{array}$$

가장 작은 정사각형의 한 변의 길이는 90cm 이고, $5 \times 6 = 30$ (장)의 타일이 필요하다.

6. 사생대회 상품으로 학용품을 준비했다. 공책 45 권, 샤프 38 개, 지우개 32 개를 될 수 있는 대로 많은 학생들에게 똑같이 나누어 주었더니 공책 3 권, 샤프 2 개, 지우개 2 개가 남았다. 몇 명의 학생에게 나누어 주었는가?

① 4 명 ② 6 명 ③ 8 명 ④ 10 명 ⑤ 11 명

해설

학생 수는 $45 \div 3$, $38 \div 2$, $32 \div 2$,
즉 42, 36, 30 의 최대공약수이므로 6 명

7. 세 변의 길이가 각각 96 m, 84 m, 108 m 인 삼각형 모양의 농장이 있다. 이 농장의 둘레에 같은 간격으로 말뚝을 박아 철조망을 설치하려고 한다. 세 모퉁이는 반드시 말뚝을 박아야 하며, 말뚝의 개수는 될 수 있는 한 적게 하려고 할 때, 말뚝은 최소한 몇 개를 준비해야 하는지 고르면?

① 12 개 ② 18 개 ③ 24 개 ④ 30 개 ⑤ 36 개

해설

96, 84, 108 의 최대공약수는 12 이므로

말뚝의 개수는

$$(96 \div 12) + (84 \div 12) + (108 \div 12) = 8 + 7 + 9 \\ = 24 \text{ (개)}$$

8. 가로 길이가 180cm 세로 길이가 150cm 인 직사각형 모양의 벽에 되도록 큰 정사각형 모양의 타일을 빈틈없이 붙이려고 한다. 타일의 한 변의 길이와 필요한 타일의 개수를 각각 구한 것으로 옳은 것은?
- ① 한 변의 길이 : 60cm , 타일의 개수 : 60 개
② 한 변의 길이 : 60cm , 타일의 개수 : 30 개
③ 한 변의 길이 : 30cm , 타일의 개수 : 60 개
④ 한 변의 길이 : 30cm , 타일의 개수 : 30 개
⑤ 한 변의 길이 : 90cm , 타일의 개수 : 60 개

해설

타일의 한 변의 길이는 180, 150 의 최대공약수이다.

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 180 \ 150} \\ 3 \overline{) \ 90 \ 75} \\ 5 \overline{) \ 30 \ 25} \\ \hline 6 \quad 5 \end{array} \quad \therefore 2 \times 3 \times 5 = 30$$

한 편, 필요한 타일의 개수는 직사각형 벽의 가로, 세로의 길이를 정사각형 타일의 한 변의 길이로 나눠 준 후 곱한 값이다.

$$(\text{가로}) = 180 \div 30 = 6(\text{개})$$

$$(\text{세로}) = 150 \div 30 = 5(\text{개})$$

$$\therefore (\text{필요한타일수}) = 6 \times 5 = 30(\text{개})$$

9. 사과 48 개, 귤 36 개, 배 60 개를 되도록 많은 학생들에게 똑같이 나누어 주려고 한다. 이 때, 몇 개씩 나누어야 하는가?
- ① 사과 3개, 귤 2개, 배 4개 ② 사과 4개, 귤 2개, 배 6개
③ 사과 3개, 귤 3개, 배 5개 ④ 사과 4개, 귤 3개, 배 5개
⑤ 사과 3개, 귤 2개, 배 5개

해설

$48 = 2^4 \times 3$, $36 = 2^2 \times 3^2$, $60 = 2^2 \times 3 \times 5$
48, 36, 60 의 최대공약수는 $2^2 \times 3 = 12$
따라서 사과 4개, 귤 3개, 배 5개이다.

10. 두 자연수 $15 \times x$, $21 \times x$ 의 최소공배수가 210 일 때, x 의 값으로 옳은 것은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$15 \times x = 3 \times 5 \times x$, $21 \times x = 3 \times 7 \times x$ 의 최소공배수는 $3 \times 5 \times 7 \times x = 210$
따라서 $x = 2$ 이다.

11. 세 자연수 A, B, C 의 최소공배수가 26 일 때, A, B, C 의 공배수 중 80 이하의 자연수는 몇 개인가?

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

세 자연수의 공배수는 최소공배수의 배수를 구하면 된다.
세 자연수 A, B, C 의 최소공배수가 26 이므로 A, B, C 의 공배수 중 80 이하의 자연수는 26, 52, 78 이다.
따라서 3 개이다.

12. 두 자연수의 최소공배수가 72 일 때, 두 수의 공배수 중 200 보다 작은 수를 모두 고르면?(정답 2개)

① 36 ② 72 ③ 104 ④ 144 ⑤ 180

해설

공배수는 최소공배수의 배수이므로 최소공배수인 72 의 배수 72 , 144 , 216 , 288 , 360 , ... 중 200 보다 작은 수는 72 , 144 이다.

13. 소인수분해를 이용하여 세 수 24, 32, 36 의 최소공배수를 구하면?

- ① 4 ② 48 ③ 96 ④ 288 ⑤ 360

해설

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 24} \\ 2 \overline{) 12} \\ 2 \overline{) 6} \\ 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 32} \\ 2 \overline{) 16} \\ 2 \overline{) 8} \\ 2 \overline{) 4} \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 36} \\ 2 \overline{) 18} \\ 3 \overline{) 9} \\ 3 \end{array}$$

$$\therefore 24 = 2^3 \times 3 \quad \therefore 32 = 2^5 \quad \therefore 36 = 2^2 \times 3^2$$

따라서 최소공배수는 $2^5 \times 3^2 = 288$ 이다.

14. 54와 72의 공약수 중에서 3의 배수인 약수를 a 개라 할 때 a 의 약수의 개수는?

① 2 ② 3 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

최대공약수 : 18

18의 약수는 1, 2, 3, 6, 9, 18 이므로 3의 배수인 약수는 4개이다.

4를 a 라 할 때 a 의 약수의 개수는 $2^2 = (2 + 1) = 3$

15. 두 자연수의 최대공약수는 12 이다. 이 두 자연수의 공약수가 아닌 것은?

① 1

② 3

③ 5

④ 6

⑤ 12

해설

두 자연수의 공약수는 최대공약수 12 의 약수이므로 1, 2, 3, 4, 6, 12 이다.

16. 200 과 $2^2 \times x$ 의 최대공약수가 20 일 때, x 의 최솟값은?

- ① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

$200 = 2^3 \times 5^2$ 이고 $20 = 2^2 \times 5$ 이므로
 $x = 5$

17. 소인수분해를 이용하여 세 수 15, 45, 90 의 최대공약수를 구하면?

- ① 3
- ② 5
- ③ 9
- ④ 10
- ⑤ 15

해설

3) 15

5

3) 45

3) 15

5

3) 90

3) 30

2) 10

5

15=3×5 45=3²×5 90=2×3²×5

따라서, 최대공약수는 $3 \times 5 = 15$ 이다.

18. $3^3 \times a$ 는 약수의 개수가 12 인 수 중 가장 작은 홀수라고 할 때, a 에 맞는 수를 구하면?

① 1 ② 4 ③ 9 ④ 25 ⑤ 36

해설

$$12 = 4 \times 3 = (3 + 1) \times (2 + 1)$$

$3^3 \times a$ 가 홀수이므로

a 는 3 보다 큰 소수의 제곱수이므로 $5^2 = 25$

19. $2^2 \times 5^{\square} \times 7$ 의 약수의 개수가 18 일 때 $\square$ 안에 들어갈 수는?

① 5

② 4

③ 3

④ 2

⑤ 1

해설

$2^2 \times 5^{\square} \times 7$ 이므로

약수의 개수는

$$(2+1) \times (\square+1) \times (1+1) = 18 \text{ (개)}$$

$$\therefore \square = 2$$

20. $3^2 \times 5 \times 11^3$ 의 약수의 개수는?

- ① 9 개 ② 12 개 ③ 15 개 ④ 18 개 ⑤ 24 개

해설

약수의 개수는 $(2 + 1) \times (1 + 1) \times (3 + 1) = 24$ (개)

21. I, M, O 는 $I \times M \times O = 2001$ 을 만족하는 서로 다른 자연수이다. 이 때, $I + M + O$ 의 최댓값은?

① 23

② 55

③ 99

④ 111

⑤ 671

해설

$2001 = 3 \times 23 \times 29$ 이고, 합의 최댓값을 구하므로, I, M, O 는 1, 3, 667 이 된다.

22. 420 에 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱을 만들려고 한다. 이 때, 곱할 수 있는 가장 작은 네 자리의 자연수는?

① 1024 ② 1280 ③ 1440 ④ 1680 ⑤ 2048

해설

$420 \times n = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \times n = m^2$ 이라 하면

가장 작은 $n = 3 \times 5 \times 7$

따라서 n 은

$$3 \times 5 \times 7 \times 1^2 = 105$$

$$3 \times 5 \times 7 \times 2^2 = 420$$

$$3 \times 5 \times 7 \times 3^2 = 945$$

$$3 \times 5 \times 7 \times 4^2 = 1680$$

그러므로 가장 작은 네 자리의 자연수 n 은 1680 이다.

23. 다음 중 50 의 소인수로만 이루어진 모임은?

- ① 2, 5
- ② 1, 2, 5
- ③ 1, 2, 5, 10
- ④ 2, 5, 10, 25
- ⑤ 1, 2, 5, 10, 25, 50

해설

50 을 소인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 50} \\ 5 \overline{) 25} \\ 5 \end{array}$$

이므로 50 의 소인수는 2, 5 이다.

24. 다음 중 자연수 180 를 바르게 소인수분해한 것은?

① $2^4 \times 5$

② $2^2 \times 3^2 \times 5$

③ $2 \times 3 \times 5^2$

④ $2 \times 3^3 \times 5$

⑤ $3^4 \times 5$

해설

$$2 \overline{) 180}$$

$$2 \overline{) 90}$$

$$3 \overline{) 45}$$

$$3 \overline{) 15}$$

$$5$$

$$\therefore 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$$

25. 다음 중에서 옳지 않은 것을 모두 고르면?

- ① 소수의 약수는 1 과 자기 자신 2 개이다.
- ② 가장 작은 소수는 2 이다.
- ③ 모든 소수는 홀수이다.
- ④ 두 소수의 곱은 소수이다.
- ⑤ 1 은 소수도 합성수도 아니다.

해설

- ㉠ 모든 소수는 홀수이다 → 소수 중 2 는 짝수이다.
- ㉡ 두 소수의 곱은 소수이다 → 두 소수의 곱은 $2 \times 3 = 6$, $3 \times 5 = 15$ 등으로 합성수이다.

26. 다음 1 보다 큰 자연수 중에서 1 과 그 수 자신만을 약수로 가지는 수가 아닌 것은?

- ① 7 ② 11 ③ 13 ④ 17 ⑤ 27

해설

1 보다 큰 자연수 중에서 1 과 그 수 자신만을 약수로 가지는 수는 소수이다.
따라서 소수가 아닌 수는 27 이다.

27. $3^6 = 729$ 를 이용하여 $729 - 3^5 - 3^a = 243$ 을 만족하는 자연수 a 의 값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$3^6 = 729$ 이고 $3^5 = 243$ 이다.
따라서 $729 - 243 - 3^a = 243$, $3^a = 243$ 이므로 $a = 5$ 이다.

28. 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면?

- ㉠

$5^2 = 25$
- ㉡

$3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 = 3^2 \times 5^2 \times 7$
- ㉢

$2^4 = 4^3$
- ㉣

$\frac{1}{5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7} = \frac{1}{5^2 \times 7^3}$
- ㉤

$\frac{1}{5^3 \times 5^4} = \frac{1}{5^{12}}$

- ① ㉠, ㉡
- ② ㉠, ㉣
- ③ ㉠, ㉤
- ④ ㉡, ㉣
- ⑤ ㉢, ㉣, ㉤

해설

㉢

$2^4 \neq 4^3$

㉤

$\frac{1}{5^3 \times 5^4} = \frac{1}{5^7}$

29. 다음 중 12 의 배수는?

① 90

② 126

③ 288

④ 352

⑤ 1498

해설

12 의 배수는 4 와 3 의 공배수이다.

30. 273^{100} 의 일의 자리의 숫자를 구하면?

- ① 1 ② 3 ③ 9 ④ 7 ⑤ 0

해설

273^{100} 의 일의 자리만 거듭제곱하여 규칙을 찾는다.

$3^1 = 3$,

$3^2 = 9$,

$3^3 = 27$,

$3^4 = 81$,

$3^5 = 243$,

...

3 을 거듭제곱할 때, 일의 자리의 숫자는 3, 9, 7, 1 의 네 개의 숫자가 반복된다.

273^{100} 의 지수인 100 를 4 로 나누면 25 이므로

273^{100} 의 일의 자리의 숫자는 반복되는 네 개의 숫자 중 마지막 숫자인 1 이다.