

1. 36 을 어떤 자연수로 나누면 나누어 떨어진다고 한다. 이때, 어떤 자연수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 9 개

해설

36 의 약수를 구하면 된다. 36 의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 이다. 따라서 9 개이다.

2. n 이 자연수일 때, $\frac{18}{n}$ 도 자연수가 된다. 이러한 n 의 값의 합은?

① 20

② 21

③ 33

④ 39

⑤ 49

해설

18의 약수는 1, 2, 3, 6, 9, 18이다.

따라서 n 의 값의 합은 $1 + 2 + 3 + 6 + 9 + 18 = 39$

3. 다음 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

- ㉠ 9 는 35 의 약수이다.
- ㉡ 1 은 모든 자연수의 배수이다.
- ㉢ 6 은 자기 자신이 약수인 동시에 배수이다.
- ㉣ 392 는 4 의 배수이다.
- ㉤ 36 의 약수의 개수는 8 개이다.

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉡, ㉣

④ ㉡, ㉤

⑤ ㉢, ㉣

해설

- ㉢. 모든 자연수는 자기 자신이 약수인 동시에 배수이다.
- ㉣. 392 는 4 의 배수이다.

4. 네 자리 수 $68\square 0$ 이 6 의 배수일 때, $\square$ 안에 알맞은 숫자를 모두 구하여라

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 4

▷ 정답 : 7

해설

6 은 2 와 3 의 배수이다.

일의 자리가 0 이므로 2 의 배수이고 3 의 배수이려면 $6+8+\square+0$ 이 3 의 배수이어야 한다.

$\therefore \square = 1, 4, 7$

5. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?(정답 2개)

① $3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 = 3^2 \times 2^5 \times 7$

② $\frac{1}{5 \times 5 \times 5 \times 5} = \frac{1}{5^4}$

③ $\frac{1}{3 \times 3 \times 7 \times 7} = \frac{1}{3^2 \times 7^2}$

④ $\frac{1}{7^4 \times 7^5} = \left(\frac{1}{9}\right)^7$

⑤ $a \times a \times a \times b \times b \times c = a^3 \times b^2 \times c^2$

해설

① $3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 = 3^2 \times 5^2 \times 7$,

④ $\frac{1}{7^4 \times 7^5} = \left(\frac{1}{7}\right)^9$,

⑤ $a \times a \times a \times b \times b \times c = a^3 \times b^2 \times c$

6. 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $2^4 = 8$

㉡ $5 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 = 5^3 \times 7^2$

㉢ $3^2 = 2^3$

㉤ $\frac{1}{2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5} = \frac{1}{2^2 \times 5^3}$

㉥ $\frac{1}{5^2 \times 5^4} = \frac{1}{5^8}$

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉠, ㉥

④ ㉡, ㉤

⑤ ㉢, ㉥

해설

㉠ $2^4 = 16$

㉢ $3^2 \neq 2^3$

㉥ $\frac{1}{5^2 \times 5^4} = \frac{1}{5^6}$

7. $2^{10} = 1024$ 를 이용하여 $1024 - 2^9 - 2^a = 256$ 을 만족하는 자연수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$2^{10} = 1024$ 이므로 $2^9 = 512$ 이다.

따라서 $1024 - 512 - 2^a = 256$, $2^a = 256$ 이므로 $a = 8$ 이다.

8. $x \times x \times y \times z \times y \times y = x^a \times y^b \times z^c$ 을 만족하는 자연수 a, b, c 에 대하여 $a + b - c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

(준식) $= x^2 \times y^3 \times z$ 이므로 $a = 2, b = 3, c = 1$ 이다.
따라서 $a + b - c = 2 + 3 - 1 = 4$ 이다.

9. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① 83 은 소수이다.

② 모든 합성수는 약수가 2 개이다.

③ 1 은 소수이다.

④ 15 이하의 소수의 개수는 6 개이다.

⑤ 소수가 아닌 자연수는 모두 합성수이다.

해설

② 모든 합성수는 약수가 3 개 이상이다.

③ 1 은 소수도 합성수도 아니다.

⑤ 소수가 아닌 자연수는 1 , 합성수이다.

10. 다음 중 소인수분해 한 것으로 옳지 않은 것은?

① $124 = 2^2 \times 31$

② $54 = 2 \times 3^3$

③ $72 = 2^3 \times 3^3$

④ $196 = 2^2 \times 7^2$

⑤ $150 = 2 \times 3 \times 5^2$

해설

③ $2^3 \times 3^2$

11. 2160 를 소인수분해하면 $a^x \times b^y \times c^z$ 이다. $z < y < x$ 일 때, $a + b + c - (x + y + z)$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$2160 = 2^4 \times 3^3 \times 5$ 이므로 $a = 2, b = 3, c = 5, x = 4, y = 3, z = 1$ 이다.

$$\therefore a + b + c - (x + y + z) = 2 + 3 + 5 - (4 + 3 + 1) = 10 - 8 = 2$$

12. 180의 소인수와 220의 소인수 중 공통인 소인수의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 2 개

해설

$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5 ,$$

$$220 = 2^2 \times 5 \times 11 \text{ 이므로}$$

180의 소인수는 2, 3, 5 ,

220의 소인수는 2, 5, 11 이므로

공통인 소인수는 2, 5 이므로 2개이다.

13. $2 \times 3^2 \times 5$ 에 적당한 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되도록 할 때, 곱할 수 있는 수 중 가장 작은 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

어떤 자연수의 제곱이 되는 수는 소인수분해를 했을 때 모든 소인수의 지수가 짝수이므로 $2 \times 3^2 \times 5$ 에서 2 와 5 의 지수가 홀수이므로 $2 \times 5 \times x^2$ 을 곱해주어야 하고 그 중 가장 작은 수는 2×5 이므로 10 이다.

14. $\frac{72}{n}$ 가 어떤 자연수의 제곱이 되게 하는 자연수 n 은 모두 몇 개인가?

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

$$72 = 2^3 \times 3^2 ,$$

$\frac{72}{n}$ 가 어떤 자연수의 제곱이 되기 위해서

$n = 2, 2 \times 3^2, 2^3, 2^3 \times 3^2$ 의 4 개이다.

15. 120 에 가능한 한 작은 자연수 a 를 곱하여 어떤 자연수 b 의 제곱이 되도록 할 때, a, b 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 30$

▷ 정답 : $b = 60$

해설

$120 = 2^3 \times 3 \times 5$ 이므로 곱할 수 있는 수는
 $2 \times 3 \times 5 \times (\text{자연수})^2$ 의 꼴이다.

$$\therefore a = 2 \times 3 \times 5 \times 1^2 = 30$$

$$\begin{aligned} 120 \times a &= 2^3 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 5 \\ &= 2^4 \times 3^2 \times 5^2 \\ &= (2^2 \times 3 \times 5)^2 \\ &= b^2 \end{aligned}$$

$$\therefore b = 60$$

16. $3^a \times 5^b$ 이 225 를 약수로 가질 때, 두 자연수 a, b 의 최솟값을 고르면?

① 1, 1

② 1, 2

③ 2, 1

④ 2, 2

⑤ 2, 3

해설

$3^a \times 5^b$ 이 $225 = 3^2 \times 5^2$ 을 약수로 가지므로, a 는 2 이상의 자연수, b 는 2 이상의 자연수가 되어야 한다.

그 중 최솟값은 $a = 2, b = 2$ 일 때이다.

17. x 는 96의 약수일 때, x 값이 될 수 없는 것은?

① 2

② 2×3

③ $2^2 \times 3$

④ 2×3^3

⑤ 2^5

해설

④ $96 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^5 \times 3$ 이므로 2×3^3 은 96의 약수가 아니다.

18. $2^2 \times 5^2 \times a^2$ 의 약수의 개수는 모두 몇 개인지 구하여라.
(단, a 는 2, 5 를 제외한 소수이다.)

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 27 개

해설

$$(2 + 1) \times (2 + 1) \times (2 + 1) = 27(\text{개})$$

19. 자연수 864의 약수의 개수와 $2^2 \times 3 \times 5^n$ 의 약수가 개수가 같을 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$864 = 2^5 \times 3^3$ 이므로

약수의 개수는 $(5 + 1) \times (3 + 1) = 24$ (개)

$2^2 \times 3 \times 5^n$ 의 약수의 개수는

$(2 + 1) \times (1 + 1) \times (n + 1) = 6 \times (n + 1)$ (개)

$6 \times (n + 1) = 24$ 이므로 $n + 1 = 4$

$\therefore n = 3$

20. 자연수 672 의 약수의 개수와 $2^2 \times a^n \times 11^3$ 의 약수의 개수가 같을 때, n 의 값을 구하여라. (단, a 는 소수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$672 = 2^5 \times 3 \times 7$$

$$(\text{약수의 개수}) = 24(\text{개})$$

$$(2 + 1) \times (n + 1) \times (3 + 1) = 24$$

$$\therefore n = 1$$

21. 1 부터 200 까지의 자연수 중에서 약수의 개수가 3개인 자연수는 모두 몇 개인가?

① 5 개

② 6 개

③ 7 개

④ 8 개

⑤ 9 개

해설

자연수 n 의 약수의 개수가 3 개이기 위해서는
1 과 n 이외에 약수가 한 개만 더 있어야하므로
자연수 n 은 소수의 완전제곱수이어야 한다.
따라서 1 부터 200 까지의 완전제곱수를 구하면
 $13^2 = 169 < 200$ 이고 $17^2 = 289 > 200$ 이므로
200 이하인 소수의 완전제곱수는
 $2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2$ 이다.

22. 567^{2009} 의 일의 자리의 숫자를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

567^{2009} 의 일의 자리만 거듭제곱하여 규칙을 찾는다.

$$7^1 = 7 ,$$

$$7^2 = 49 ,$$

$$7^3 = 343 ,$$

$$7^4 = 2401 ,$$

$$7^5 = 16807 ,$$

$$7^6 = 117649 ,$$

...

7 을 거듭제곱할 때, 일의 자리의 숫자가 7, 9, 3, 1 의 네 개의 숫자가 반복된다.

567^{2009} 의 지수인 2009 를 4 로 나누면

$$2009 \div 4 = 502 \cdots 1 \text{ 이므로}$$

567^{2009} 의 일의 자리의 숫자는 반복되는 네 개의 숫자 중 첫 번째 숫자인 7 이다.

23. 네 자리의 정수 $41\square 2$ 가 3 의 배수인 동시에 4 의 배수가 되도록 $\square$ 안에 알맞은 수는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

3의 배수는 자리 수의 합이 3의 배수 이므로 $41\square 2 \Rightarrow 4 + 1 + \square + 2 = 7 + \square$ 에서 $\square$ 안에 들어갈 수 있는 수는 2, 5, 8 이다.

4의 배수는 마지막 두 자리가 4의 배수이어야 하므로 $41\square 2 \Rightarrow \square 2$ 에서

$\square$ 안에 들어갈 수 있는 수는 1, 3, 5, 7, 9 이다.

따라서 동시에 만족하는 수는 5 이다.

24. 민수는 15 층 아파트에서 살고 있는데, 엘리베이터가 자주 고장이 난다. 어느 날 엘리베이터 입구에 ‘약수의 개수가 1 개 또는 3 개 이상인 층에서만 쉼니다.’ 라는 문구가 적혀 있었을 때, 엘리베이터가 서는 층은 모두 몇 개인가?

① 5 개

② 6 개

③ 7 개

④ 8 개

⑤ 9 개

해설

약수의 개수가 1 개인 수는 1 뿐이다. 약수가 3 개 이상인 수는 합성수이므로 15 층 아래에 있는 합성수는 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15로 8 개이다. 따라서 약수의 개수가 1 개 또는 3 개 이상인 수는 모두 9 개이다.

25. $2 \times n$ 이 어떤 자연수의 세제곱이고, $\frac{n}{5}$ 이 어떤 자연수의 제곱이 되는 자연수 n 중에서 가장 작은 것은?

① 100

② 200

③ 300

④ 400

⑤ 500

해설

가장 작은 자연수 n 에서 $2 \times n$ 이 세제곱이므로 n 은 적어도 2가 두 번 곱해져 있고, $\frac{n}{5}$ 이 제곱이므로 n 은 5가 세 번 곱해져 있다.

$$\therefore n = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 = 500$$

26. $96a = b^3$ 을 만족하는 가장 작은 자연수 a, b 를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 18$

▷ 정답 : $b = 12$

해설

$$96a = 2^5 \times 3 \times a = b^3$$

지수가 3 의 배수가 되도록 작은 수를 곱해주어야 한다.

$$\therefore a = 2 \times 3^2 = 18$$

$$2^6 \times 3^3 = (2^2 \times 3)^3 = 12^3$$

$$\therefore b = 12$$

27. $2^a \times 3^b \times 11^c$ 이 132 를 약수로 가질 때, 세 자연수 a, b, c 의 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

132 를 소인수분해하면 $132 = 2^2 \times 3 \times 11$ 이다. 한편 $2^a \times 3^b \times 11^c$ 이 132 를 약수로 가지므로 a 는 2 보다 크거나 같고, b 는 1 보다 크거나 같다. 또한 c 도 1 보다 크거나 같다.

따라서 a, b, c 의 최솟값은 각각 2, 1, 1 이므로 구하는 합은 $2 + 1 + 1 = 4$ 이다.

28. 자연수 a 의 약수의 개수를 $n(a)$ 로 나타낼 때, $n(240) \div n(162) \times n(x) = 20$ 을 만족시키는 자연수 x 중에서 가장 작은 수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 48

해설

$$240 = 2^4 \times 3 \times 5, 162 = 2 \times 3^4 \text{ 에서}$$

$$n(240) = (4+1) \times (1+1) \times (1+1) = 20$$

$$n(162) = (1+1) \times (4+1) = 10$$

$$n(240) \div n(162) \times n(x) = 20$$

$$20 \div 10 \times n(x) = 20$$

$$\therefore n(x) = 10$$

$$10 = 5 \times 2 = (4+1)(1+1) \text{ 이므로}$$

$$\text{가장 작은 } x = 2^4 \times 3 = 48$$

$$\therefore 48$$

29. 약수의 개수가 36 개이고, $2^x \times 3^y \times 5^z \times 7$ 으로 소인수분해되는 자연수는 모두 몇 개인가? (단, x, y, z 는 자연수)

- ① 3 개 ② 6 개 ③ 9 개 ④ 12 개 ⑤ 15 개

해설

$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$ 이므로

$(x, y, z) = (1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1)$ 으로 3 개이다.

30. $18 \times A \times 7^2$ 의 약수의 개수가 36 이라고 한다. 가장 작은 A 의 값을 a , 두 번째로 작은 A 의 값을 b 라고 할 때, $b - a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$2 \times 3^2 \times 7^2 \times A$$

약수의 개수가 36 개이므로

A 가 될 수 있는 수는 $2^2, 3^3, 7^3$ 이거나 2, 3, 7 이외의 소수이다.

따라서 가장 작은 값은 $2^2 = 4$,

두 번째로 작은 값은 5

$$\therefore 5 - 4 = 1$$