1. 임의의 자연수에 대하여 정의된 함수 f가 다음 두 조건 Ⅰ, Ⅱ를 만족한다.

> Ⅰ. $f(2n) = f(n)(n = 1, 2, 3, \cdots)$
> Ⅱ. $f(2n+1) = n(n = 0, 1, 2, \cdots)$

이 때, $f(100)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$\begin{aligned} f(100) &= f(2 \cdot 50) = f(50) = f(2 \cdot 25) = f(25) \\ &= f(2 \cdot 12 + 1) = 12 \end{aligned}$$

2. 다음 보기 중 두 함수 f, g 가 서로 같은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ $f(x) = |x|$, $g(x) = x$

ㄴ 정의역이 $\{-1,\ 0,\ 1\}$ 일 때 $f(x) = x$, $g(x) = x^3$

ㄷ $f(x) = \frac{1}{x+2}$, $g(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ　④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ $f(-1) = 1$, $g(-1) = -1$ 이므로 $f \neq g$

ㄴ $f(-1) = g(-1) = -1$, $f(0) = g(0) = 0$,

$f(1) = g(1) = 1$ 이므로 $f = g$

ㄷ $f(x)$ 의 정의역은 $\{x \mid x \neq -2$인 모든 실수$\}$ 이고

$g(x)$ 의 정의역은 $\{x \mid x \neq \pm 2$인 모든 실수$\}$ 이므로 $f \neq g$

따라서 $f = g$ 인 것은 ㄴ 뿐이다.

3. 자연수 n 을 10 으로 나눈 나머지를 $f(n)$ 으로 나타내고, $a_n = f(n^2) - f(n)$ 이라고 할 때, a_{2004} 의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

(자연수 n 을 10 으로 나눈 나머지)
$=$(n 의 일의 자리수)
$a_{2004} = f(2004^2) - f(2004) = 6 - 4 = 2$

4. 분수함수 $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ 에 대하여 $f(f(x)) = x^3$ 을 만족시키는 x 의 값을 모두 구한 것을 고르면?

① -1 ② 0 ③ $-1,\ 0$

④ $0,\ 1$ ⑤ $-1,\ 0,\ 1$

해설

분수함수 $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ 에서

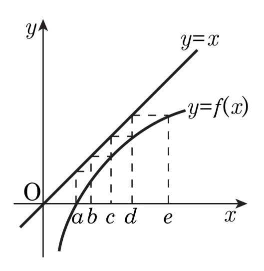
$$f(f(x)) = \frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1} - 1} = \frac{x}{x-(x-1)} = x$$

즉, $x = x^3$ 에서 $x^3 - x = x(x-1)(x+1) = 0$

$\therefore\ x = -1,\ 0,\ 1$

그런데 $x \neq 1$ 이므로 구하는 x 의 값은 $-1,\ 0$

5. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(f \circ f)^{-1}(b)$ 의 값을 구하면?



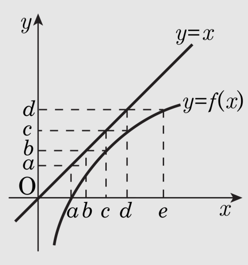
① a ② b ③ c ④ d ⑤ e

해설

$(f \circ f)^{-1}(b) = (f^{-1} \circ f^{-1})(b)$

$= f^{-1}(f^{-1}(b))$ 이므로

$f^{-1}(b) = m$ 이라고 하면



$f(m) = b$ 다음 그래프에서 $f(c) = b$ 이므로 $m = f^{1}(b) = c$

$\therefore f^{-1}(f^{-1}(b)) = f^{-1}(c)$

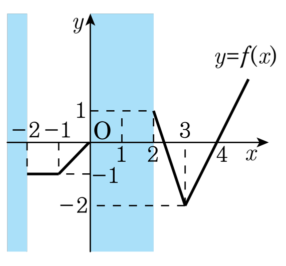
$f^{-1}(c) = n$ 이라고 하면

$f(n) = c$ 그래프에서 $f(d) = c$ 이므로

$n = f^{-1}(c) = d$

$\therefore (f \circ f)^{-1}(b) = d$

6. 모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = -f(x)$를 만족시키는 함수 $y = f(x)$의 그래프의 일부분이 다음 그림과 같이 지워져 있다. 다음 보기는 함수 $y = f(x)$에 대한 설명이다. M, N의 합을 구하여라.



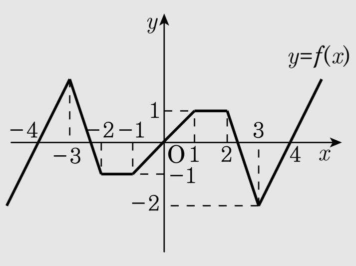
$-4 \le x \le -2$일 때, $f(x)$의 최댓값은 M이고, $0 \le x \le 2$일 때, $f(x)$의 최댓값은 N이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = -f(x)$를
만족시키므로 주어진 함수는 기함수
즉, 원점 대칭이다. 따라서 그래프를 완성하면
다음 그림과 같으므로



$-4 \le x \le -2$일 때,
$f(x)$의 최댓값 $M = 2$이고,
$0 \le x \le 2$일 때,
$f(x)$의 최댓값 $N = 1$이다.
$\therefore M + N = 3$

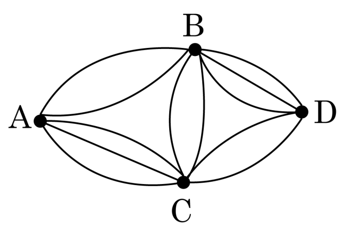
7. 180 과 600 의 공약수의 개수는 모두 몇 개인가?

① 8 개 ② 9 개 ③ 10 개 ④ 11 개 ⑤ 12 개

해설

두 수의 공약수는 두 수의 최대공약수의 약수이므로
$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ 이고,
$600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$ 에서
최대공약수 $G.C.D. = 2^2 \times 3 \times 5$ 이고
따라서 공약수의 개수는 12

8. A, B, C, D 네 지점 사이에 오른쪽그림과 같은 도로망이 있다. A 에서 D 까지의 경로는 모두 몇 가지인가? (단, 동일 지점은 많아야 한번만 지난다.)



▶ 답 : ________ 가지

▷ 정답 : 38 가지

해설

A 에서 D 까지의 경로는
$A \to B \to D$ 의 경우 : $2 \times 3 = 6$ (가지)
$A \to C \to D$ 의 경우 : $3 \times 2 = 6$ (가지)
$A \to B \to C \to D$ 의 경우 :
$2 \times 2 \times 2 = 8$ (가지)
$A \to C \to B \to D$ 의 경우 :
$3 \times 2 \times 3 = 18$ (가지)
따라서 구하는 가지수는
$6 + 6 + 8 + 18 = 38$ (가지)

9. 5 원짜리 동전 4 개, 10 원짜리 동전 2 개, 100 원짜리 동전 1 개를 사용하여 거스름돈 없이 지불할 수 있는 지불금액의 수는 몇 가지인지 구하여라.

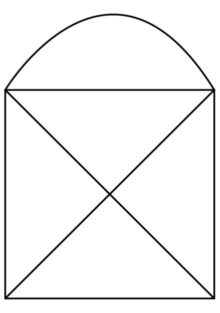
▶ 답 : ________ 가지

▷ 정답 : 17 가지

해설

5 원짜리 동전 4 개이면 10 원짜리 동전 2 개와 같으므로 금액이 중복된다.
10 원짜리 동전 2 개를 5 원짜리 동전 4 개로 바꾸면 5 원짜리 동전 8 개, 100 원짜리 동전 1 개가 되고 지불 방법의 수는
$(8+1)\times(1+1) = 18$ 가지
돈이 0 원이면 지불하는 것이 아니므로
$18 - 1 = 17$ 가지

10. 다음 그림과 같이 다섯 개의 영역으로 나누어진 도형이 있다. 각 영역에 빨간색, 노란색, 파란색 중 한 가지 색을 칠하는데, 인접한 영역은 서로 다른 색을 칠하여 구별하려고 한다. 칠할 수 있는 방법의 수를 구하여라.

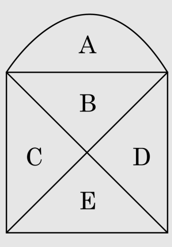


▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 36 가지

해설

경우의 수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.



그림에서 A , B 영역에 칠할 수 있는 색은 각각 3 가지, 2 가지이다.

i) C , D 영역에 같은 색을 칠하고 E 영역을 칠하는 경우 : 2×2 가지

ii) C , D 영역에 다른 색을 칠하고 E 영역을 칠하는 경우 : 2×1 가지

$\therefore 3 \times 2 \times (2 \times 2 + 2 \times 1) = 36$

11. 다음 그림과 같이 모양이 서로 다른 세 개의 주머니에 $1, 2, 3$ 이 적힌 세 개의 구슬이 들어 있다.

이 세 주머니에서 각각 한 개의 구슬을 꺼낼 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ 세 개의 주머니에서 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 모두 같은 경우의 수는 3 개이다.
㉡ 세 개의 주머니에서 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 모두 다른 경우의 수는 6 개이다.
㉢ 세 개의 주머니에서 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 2 개가 같은 경우의 수는 18개이다.

① ㉠
② ㉠, ㉡
③ ㉠, ㉢
④ ㉡,㉢
⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 세 개의 주머니에서 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 모두 같은 경우는
$(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3)$ 즉, 3 개 (참)
㉡ 세 개의 주머니에서 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 모두 다른 경우의 수는 $3 \times 2 \times 1 = 6$(참)
㉢ 세 개의 주머니에서 각각 한 개의 구슬을 꺼내는 경우의 수는 $3 \times 3 \times 3 = 3^3$ 이므로 세 개의 주머니에서 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 2 개가 같은 경우의 수는, $27 - 3 - 6 = 18$ (참)
따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢

12. *cellular* 의 8 개의 문자를 모음끼리 이웃하여 나열하는 방법의 수는?

① 705 ② 720 ③ 735 ④ 750 ⑤ 765

해설

l 이 3 번 반복되고, 모음을 하나로 보면, $\Rightarrow \frac{6!}{3!}$

여기에 모음을 배열하는 방법을 곱한다.

$\therefore \frac{6!}{3!} \times 3! = 720$

13. *various* 의 7 개의 문자를 일렬로 나열할 때, 양 끝에 모두 자음이 오는 경우의 수는?

① 120 ② 360 ③ 600 ④ 720 ⑤ 1080

해설

자음 3 개중 2 개를 뽑아 일렬로 나열하는 수 : ${}_3P_2$
나머지 5 개 문자를 배열하는 수 : 5!
${}_3P_2 \times 5! = 720$

14. 10 명의 선수를 가진 어떤 농구팀이 5 명씩 청, 백팀으로 나누어 연습 경기를 가지려고 한다. 어떤 특정한 두 선수를 서로 다른 팀에 넣기로 할 때, 팀을 나눌 수 있는 방법의 수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 가지

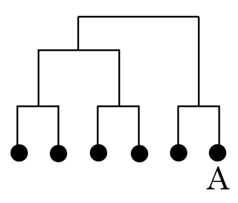
▷ 정답 : 140 가지

해설

특정한 두 선수를 제외한 나머지 8 명을 4 명씩 2 개의 조로 나누어 특정한 두 선수 각각과 팀을 이루어 청, 백팀으로 구분하면 된다.

${}_8C_4 \times {}_4C_4 \times 2! = 140$ (가지)

15. 지난 대회 우승 팀 A 가 먼저 배정을 받은 다음 그림과 같은 토너먼트 방식의 대진표에서 제비뽑기를 하여 5 개의 팀을 결정하기로 할 때, 가능한 모든 경우의 수는?



① 15　　② 18　　③ 20　　④ 24　　⑤ 30

해설

A 팀과 게임을 할 팀을 뽑는 방법의 수는
${}_5\mathrm{C}_1 = 5$ (가지)
그 각각의 경우에 대하여 나머지 4 팀을
(2 팀, 2 팀) 으로 편성하는 방법의 수는
${}_4\mathrm{C}_2 \times {}_2\mathrm{C}_2 \times \dfrac{1}{2!} = 3$ (가지)
따라서 구하는 경우의 수는 $5 \times 3 = 15$ (가지)

16. $X = \{x \mid x \geq a$ 인 실수 $\}$이고, $f(x) = x^2 - 6x$ 로 정의되는 함수 $f : X \to X$ 가 일대일대응이 될 때, 상수 a 의 값을 하면?

① 3　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 10

해설

$X = \{x \mid x \geq a$ 인 실수 $\}$이므로
일대일 대응이 되려면
$x^2 - 6x \geq x$ 가 되어야 한다.
부등식을 풀면
$x \leq 0$ 또는 $x \geq 7$
$x \geq a$ 이므로 $x \geq 7$ 을 만족하는 x 의 최솟값이 a 가 된다.
$\therefore\ a = 7$

17. 함수 $f(x)$ 가 $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=2x(x\neq 1)$ 를 만족할 때 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 의 식은?

① $\frac{x+2}{x-2}(x\neq 2)$ ② $\frac{x+1}{x-2}(x\neq 2)$ ③ $\frac{x-1}{x-2}\ (x\neq -1)$
④ $\frac{x+2}{x+1}(x\neq -1)$ ⑤ $\frac{x+2}{x-1}(x\neq 1)$

해설

$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=2x$ 에서

$\frac{x+1}{x-1}=t$ 로 놓으면 $x=\frac{t+1}{t-1}$

$\therefore f(t)=\frac{2(t+1)}{t-1},\ f(x)=\frac{2(x+1)}{x-1}$

$y=\frac{2(x+1)}{x-1}$ 이면

$yx-y=2x+2$ 에서 $x=\frac{y+2}{y-2}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{x+2}{x-2}\ (x\neq 2)$

18. 두 함수 $f(x) = 4x+1,\ g(x) = 2x+3$ 에 대하여 $\left(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g\right)(-2)$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{1}{5}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

해설

두 함수 $f(x) = 4x + 1,\ g(x) = 2x + 3$ 에 대하여

$$\begin{aligned} g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g &= g \circ \left(g^{-1} \circ f^{-1}\right) \circ g \\ &= \left(g \circ g^{-1}\right) \circ f^{-1} \circ g \\ &= f^{-1} \circ g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g\right)(-2) &= (f^{-1} \circ g)(-2) \\ &= f^{-1}(g(-2)) \\ &= f^{-1}(-1) \end{aligned}$$

$f^{-1}(-1) = a$ 라고 하면 $f(a) = -1$ 이므로

$4a + 1 = -1$

$\therefore a = -\frac{1}{2}$

$\therefore \left(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g\right)(-2) = -\frac{1}{2}$

19. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^2\ (x \geq 0)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할때, $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ 3 ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$x \geq 0$ 에서 $y=f(x)$ 의 그래프와
직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표를 구하면
$\frac{1}{2}x^2=x$ 에서 $x^2-2x=0$, $x(x-2)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=2$
따라서 두 교점의 좌표가 $(0,\ 0)$, $(2,\ 2)$ 이므로
두 교점 사이의 거리는 $\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

20. 함수 $f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-a|$ 가 $x = a$ 에서 최솟값을 가질 때, $f(0) + f(3)$ 의 값은?

① 9　　② -9　　③ $2a$
④ $2a-3$　　⑤ $-2a+3$

해설

절댓값 기호가 홀수 개 있을 때, 절댓값 기호 안의 값이 0 이 되게 하는 x 의 값 중 가운데 값에서 최솟값을 가지므로 $x = a$ 에서 $f(x)$ 가 최솟값을 가지려면 $1 \le a \le 2$ 이어야 한다.
이 때, $f(0) = |-1| + |-2| + |-a| = 3 + a$
$f(3) = |2| + |1| + |3-a| = 6 - a$
$\therefore f(0) + f(3) = 3 + a + 6 - a = 9$

21. 키가 모두 다른 남학생 세 명과 여학생 세 명이 일렬로 놓인 의자에 앉으려고 한다. 남학생끼리는 키가 작은 학생이 큰 학생보다 왼쪽에 앉아야 할 때, 방법의 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 120

해설

남학생 세 명이 앉는 순서는 정해져 있다.
6 명이 앉는 방법의 수를 남학생 3 명이 자리를 바꿔 앉는 방법의 수로 나누면

$\frac{6!}{3!} = 120$

22. 집합 S_1, S_2, S_3 은 다음과 같다.

$S_1 = \{1, 2\}$

$S_2 = \{1, 2, 3, 4\}$

$S_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

집합 S_1 에서 한 개의 원소를 선택하여 백의 자리의 수, 집합 S_2 에서 한 개의 원소를 선택하여 십의 자리의 수, 집합 S_3 에서 한 개의 원소를 선택하여 일의 자리의 수로 하는 세 자리의 수를 만들 때, 각 자리의 수가 모두 다른 세 자리의 개수는?

① 8　② 12　③ 16　④ 20　⑤ 24

해설

각 자리의 수가 모두 다른 세 자리의 수를 만들려면 백의 자리에는 집합 S_1 의 원소 2 개 중 하나를 선택하고 십의 자리에는 집합 S_2 의 원소 중 백의 자리에서 사용한 수를 제외한 3개의 수 중 하나를 선택한다.
마찬가지로 일의 자리에는 집합 S_3 의 원소 중 백의 자리와 십의 자리에서 사용한 수를 제외한 4 개의 수 중 하나를 선택한다.
따라서, 구하는 세 자리의 수의 개수는
${}_2C_1 \times {}_3C_1 \times {}_4C_1 = 24$

23. 2000 보다 작은 네 자리의 자연수 중에서 각 자리의 숫자 중 두 개만 같은 자연수는 몇 개인지 구하여라.

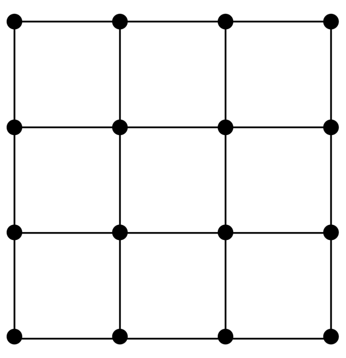
▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 432 개

해설

$1\boxed{}\boxed{}\boxed{}$ 인 네자리 자연수에서
같은 두수가 1 인 수의 개수는
${}_3C_1 \times {}_9P_2 = 216$
같은 두수가 1 이 아닌 수의 개수는
${}_9C_1 \times {}_3C_2 \times {}_8C_1 = 216$ 이므로
구하고자 하는 자연수의 개수는 432 개

24. 그림과 같이 정사각형 모양으로 16 개의 점이 있을 때, 이 중 네 점을 연결하여 만들 수 있는 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는?



① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

해설

가로줄에서 2 개, 세로줄에서 2 개를 선택하면
직사각형의 수가 되고 여기서 정사각형의 수
(14) 를 빼준다 $\Rightarrow {}_4C_2 \times {}_4C_2 - 14 = 22$

25. 임의의 두 실수 a, b 에 대하여 $f(a+b)=f(a)+f(b)$ 를 만족하는 $f(x)$ 는?

① $f(x)=x^2-4$
② $f(x)=\frac{x}{x+1}$
③ $f(x)=x^2+1$
④ $f(x)=2x$
⑤ $f(x)=\sqrt{x+1}$

해설

$f(x)=2x$에서
$f(a+b)=2(a+b)$
$f(a)+f(b)=2a+2b$이므로 $f(a+b)=f(a)+f(b)$가 성립한다.
∴ ④