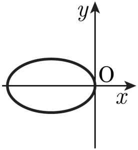
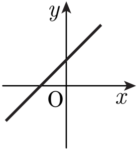
1. 다음 그래프 중 역함수를 갖는 것은?

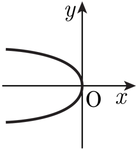
①



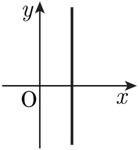
②



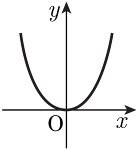
③



④



⑤



해설

역함수를 갖는 것은 일대일 대응이다. ⇒ ②

2. 두 함수 $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = -x + 5$에 대하여 $(f \circ g^{-1})(a) = 1$이 성립할 때 상수 a의 값은 얼마인가?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$(f \circ g^{-1})(a) = 1$에서

$f(g^{-1}(a)) = 1$ $f(1) = 1$이므로

$\therefore g^{-1}(a) = 1$에서 $a = g(1) = 4$

3. 다음 식을 간단히 한 식은?

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{a}}}$$

① $a+1$ ② $a+2$ ③ $-a+1$

④ $-a+2$ ⑤ $a-1$

해설

아래에서부터 계산해 올라가자.

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{a}}}=\frac{1}{1-\frac{a}{a-1}}=\frac{a-1}{a-1-a}=-a+1$$

4. 철수는 걸어서 학교에 다닌다. 한 걸음에 75 cm씩 1분에 평균 90 걸음을 가고, 통학 시간은 16분이다. 동생 철이도 같은 학교에 같은 길을 따라 걸어다니고, 한 걸음에 60 cm씩 1분에 평균 100걸음을 간다고 할 때, 동생 철이의 통학 시간은 몇 분인가?

① $14 + \frac{2}{9}$ 분 ② 15분 ③ 18분

④ 20분 ⑤ $22 + \frac{2}{9}$ 분

해설

철수 통학 거리는 $75 \times 90 \times 16(\mathrm{cm})$

동생 철이의 통학 시간은 $\frac{75 \times 90 \times 16}{60 \times 100} = 18$(분)

5. 분수함수 $y = \dfrac{ax+b}{x-1}$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프가 모두 점 $(2,\ 3)$ 을 지날 때, 상수 $a,\ b$ 의 곱 ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$f(x) = \dfrac{ax+b}{x-1}$ 라 하면 $f(2) = 3,\ f^{-1}(2) = 3$

$f(2) = 2a + b = 3 \cdots ㉠$

$f^{-1}(2) = 3$ 에서 $f(3) = 2$ 이므로

$f(3) = \dfrac{3a+b}{2} = 2 \quad \therefore 3a + b = 4 \cdots ㉡$

㉠, ㉡ 을 연립하여 풀면

$a = 1,\ b = 1 \quad \therefore ab = 1$

6. 함수 $f(x)=ax+b$의 그래프와 그 역함수의 그래프가 모두 점 $(3,\ -2)$를 지날 때, $a+b$의 값은 얼마인가?

① -2 ② 0 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$y=f(x)$의 그래프가 점 $(3,\ -2)$를 지나므로

$f(3)=-2 \quad \therefore 3a+b=-2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

또, 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프도

점 $(3,\ -2)$를 지나므로

$f^{-1}(3)=-2 \quad \therefore f(-2)=3$

$\therefore -2a+b=3 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-1,\ b=1$

$\therefore a+b=0$

7. 모든 실수 x에 대하여 다음 분수식 $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)^2} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x+2} + \dfrac{c}{(x+2)^2}$ 가 항상 성립하도록 상수 $a,\ b,\ c$의 값을 정할 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

주어진 식의 우변을 통분하면

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)^2}$$

$$= \frac{a(x+2)^2 + b(x+1)(x+2) + c(x+1)}{(x+1)(x+2)^2}$$

$\therefore\ 1 = a(x+2)^2 + b(x+1)(x+2) + c(x+1)$

이것이 x에 대한 항등식이어야 하므로

양변에 $x=-1$을 대입하면 $1=a$

$x=-2$를 대입하면 $1=-c$

즉, $c=-1$

$x=0$을 대입하면 $1=4a+2b+c$

$a=1,\ c=-1$ 이므로 $1=4+2b-1$

$\therefore\ b=-1$

$\therefore\ a+b+c = 1-1-1 = -1$

8. $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{13\times14}=\frac{a}{14}$ 에서 a의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 13

해설

준식 $=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdots-\frac{1}{14}=1-\frac{1}{14}=\frac{13}{14}$

$\therefore a=13$

9. 등식 $\dfrac{225}{157}=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e}}}}$ 을 만족시키는 자연수 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ 를 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=1$

▷ 정답 : $b=2$

▷ 정답 : $c=3$

▷ 정답 : $d=4$

▷ 정답 : $e=5$

해설

$$\frac{225}{157}=1+\frac{68}{157}=1+\cfrac{1}{\cfrac{157}{68}}$$

$$=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{21}{68}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{5}{21}}}$$

$$=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}}$$

$\therefore a=1,\ b=2,\ c=3,\ d=4,\ e=5$

10. $a+\dfrac{1}{b}=1$, $b+\dfrac{2}{c}=1$일 때, $\dfrac{4}{abc}$의 값은?

① -4 ② -2 ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ 2 ⑤ $-\dfrac{1}{2}$

해설

$a+\dfrac{1}{b}=1$을 $a=1-\dfrac{1}{b}\cdots$ ㉠

$b+\dfrac{2}{c}=1$을 $b=1-\dfrac{2}{c}\cdots$ ㉡

㉡ 에서 $b=\dfrac{c-2}{c}\cdots$ ㉢이라 놓으면

㉢ 을 ㉠ 에 대입

$$a=1-\dfrac{1}{\dfrac{c-2}{c}}=1-\dfrac{c}{c-2}=\dfrac{-2}{c-2}$$

$$abc=\dfrac{-2}{c-2}\times\dfrac{c-2}{c}\times c=-2$$

$$\therefore \dfrac{4}{abc}=-2$$

11. $3x = 4y = 2z$일 때, $\dfrac{x^2 - y^2 + z^2}{x^2 + y^2 - z^2}$의 값은? (단, $xyz \neq 0$)

① $-\dfrac{1}{7}$ ② $\dfrac{2}{11}$ ③ $-\dfrac{43}{11}$ ④ $\dfrac{7}{9}$ ⑤ 2

해설

$3x = 4y = 2z = k$라 놓는다.

$x = \dfrac{k}{3},\ y = \dfrac{k}{4,} z = \dfrac{k}{2}$를 주어진 식에 대입한다.

$$\therefore \frac{x^2 - y^2 + z^2}{x^2 + y^2 - z^2} = \frac{\frac{k^2}{9} - \frac{k^2}{16} + \frac{k^2}{4}}{\frac{k^2}{9} + \frac{k^2}{16} - \frac{k^2}{4}}$$

$$= \frac{64 - 36 + 144}{64 + 36 - 144}$$

$$= \frac{172}{-44} = -\frac{43}{11}$$

12. $2x-y+z=0$, $x-2y+3z=0$ 일 때, $\dfrac{5x^2-xy+y^2}{x^2+y^2+z^2}$ 의 값은?

① $\dfrac{5}{7}$ ② $\dfrac{7}{5}$ ③ $\dfrac{3}{7}$ ④ $\dfrac{7}{3}$ ⑤ 1

해설

$2x-y+z=0\cdots$㉠

$x-2y+3z=0\cdots$㉡

㉠ $-$ ㉡ $\times 2$ 에서 정리하면

$y=\dfrac{5}{3}z$

㉠ $\times 2-$ ㉡에서 정리하면

$x=\dfrac{1}{3}z$

$\therefore\ x:y:z=\dfrac{1}{3}z:\dfrac{5}{3}z:z$

$=1:5:3$

$x=1,\ y=5,\ z=3$을 대입하면

(준식)$=\dfrac{5-5+25}{1+25+9}=\dfrac{25}{35}=\dfrac{5}{7}$

13. 함수 $f(x) = \dfrac{bx+c}{x+d}$ 의 점근선은 $x = -2,\ y = 4$ 이고, 점 $(3, 1)$ 을 지난다고 한다. 이 때, $f(1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$f(x) = \dfrac{bx+c}{x+d}$ 에 대하여

점근선이 $x = -2$ 이므로 $f(x) = \dfrac{bx+c}{x+2}$

점근선이 $y = 4$ 이므로 $f(x) = \dfrac{4x+c}{x+2}$

이것이 점 $(3,\ 1)$ 을 지나므로

$1 = \dfrac{12+c}{3+2}$

$\therefore\ c = -7$

따라서 $f(x) = \dfrac{4x-7}{x+2}$ 이므로

$f(1) = \dfrac{-3}{3} = -1$

14. 분수함수 $y=\dfrac{-3x-8}{x+2}$의 그래프에 대한 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ 제 1, 3 사분면만을 지난다.

㉡ 두 점근선의 교점은 $(-2,\ -3)$이다.

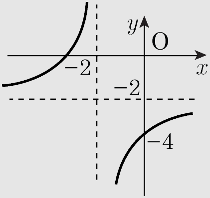
㉢ $y=\dfrac{-2}{x}$을 x축으로 -2, y축으로 -3만큼 평행이동 시킨 것이다.

① ㉡ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢

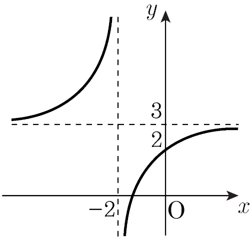
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 다음 그림의 개형을 가지므로 제 2, 3, 4 사분면을 지난다.



15. 다음 그림과 같이 주어진 분수함수 $y = \dfrac{ax+b}{x+c}$ 의 점근선이 $x = -2$, $y = 3$ 일 때, 상수 a, b, c 의 합 $a+b+c$ 의 값은?



① -9 ② -7 ③ -5

④ 7 ⑤ 9

해설

점근선이 $x=-2, y=3$ 이므로 $y = 3 + \dfrac{k}{x+2}$, $(k \neq 0)$

점 $(0,\ 2)$ 를 지나므로

$2 = 3 + \dfrac{k}{0+2}$, $\quad k = -2$

따라서 $y = 3 + \dfrac{-2}{x+2} = \dfrac{3x+4}{x+2}$

$\therefore \quad a = 3,\ b = 4,\ c = 2$

$\therefore \quad a+b+c = 9$

16. 분수함수 $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ 의 그래프가 직선 $y=mx+1$ 과 만나지 않도록 하는 실수 m 의 값의 범위를 구하면?

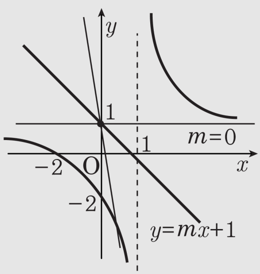
① $0<m\le 12$ ② $-12\le m<0$ ③ $-12<m\le 0$

④ $0\le m<12$ ⑤ $-12\le m\le 12$

해설

$y=\dfrac{x+2}{x-1}=\dfrac{x-1+3}{x-1}=\dfrac{3}{x-1}+1$ 이므로 함수 $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ 의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

(i) 그림에서 $m=0$ 일 때
두 그래프는 만나지 않는다.



(ii) $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ 와 $y=mx+1$ 에서

$\dfrac{x+2}{x-1}=mx+1$

즉, $mx^2-mx-3=0$

이때, 판별식을 D 라 하면

$D=m^2+12m<0,\ m(m+12)<0$

$\therefore\ -12<m<0$

(i), (ii)에서 구하는 실수 m 의 값의 범위는

$-12<m\le 0$

17. 무리식 $\sqrt{2-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$의 값이 실수가 되도록 x의 범위를 정할 때, 정수 x의 개수는?

① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 5개 ⑤ 6개

해설

$2-x \geq 0,\ \ x+3>0$

$\therefore -3<x\leq 2$ 이므로 정수의 개수는 5개

18. $a<0$일 때, 다음 중 나머지 넷과 그 값이 <u>다른</u> 하나는?

① $|a|$ ② $\dfrac{a^2}{|a|}$ ③ $\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{|a|}}$

④ $\sqrt{(-a)^2}$ ⑤ $(\sqrt{-a})^2$

해설

$a<0$

① $|a|=-a$

② $\dfrac{a^2}{|a|}=\dfrac{a^2}{-a}=-a$

③ $\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{-a}}=\dfrac{a\sqrt{-a}i}{\sqrt{-a}}=ai$

④ $\sqrt{(-a)^2}=|-a|=-a \quad (\because -a>0)$

⑤ $(\sqrt{-a})^2=-a(\because -a>0)$

19. $\sqrt{10-8\sqrt{3-2\sqrt{2}}}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라고 할 때, $\dfrac{2}{b-a}+\dfrac{a\sqrt{2}}{b}$의 값을 구하면?

① $1+\sqrt{2}$　　② $2+\sqrt{2}$　　③ $3+\sqrt{2}$

④ $4+\sqrt{2}$　　⑤ $5+\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{10-8\sqrt{3-2\sqrt{2}}} &= \sqrt{10-8\left(\sqrt{2}-1\right)}\\ &= \sqrt{18-2\sqrt{32}}\\ &= 4-\sqrt{2}\end{aligned}$$

$\therefore a=2,\ b=2-\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \frac{2}{-\sqrt{2}}+\frac{2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\\ &= -\sqrt{2}+\frac{4\sqrt{2}+4}{2}\\ &= 2+\sqrt{2}\end{aligned}$$

20. $x = \dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$ 일 때, $\dfrac{y^2}{x} + \dfrac{x^2}{y}$ 의 값은?

① $2\sqrt{5}$ ② $10\sqrt{5}$ ③ $25\sqrt{5}$ ④ $34\sqrt{5}$ ⑤ $40\sqrt{5}$

해설

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}+2} = \frac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} = \sqrt{5}-2$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = \sqrt{5}+2$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{x} + \frac{x^2}{y} = \frac{x^3+y^3}{xy}$$

$$= \frac{(x+y)^3 - 3xy(x+y)}{xy}$$

$$= \frac{(2\sqrt{5})^3 - 3(2\sqrt{5})}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}$$

$$= 40\sqrt{5} - 6\sqrt{5} = 34\sqrt{5}$$

21. $x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 일 때, x^2-x-2의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 에서 $2x=\sqrt{5}+1$

$2x-1=\sqrt{5}$의 양변을 제곱하면

$4x^2-4x+1=5 \quad \therefore\ x^2-x-1=0$

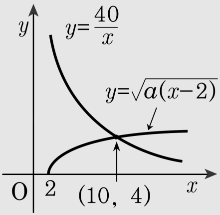
$\therefore\ x^2-x-2=x^2-x-1-1=0-1=-1$

22. 함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동 한 그래프와 곡선 $y = \dfrac{40}{x}(x > 0)$ 이 만나는 점의 x좌표가 10 일 때, 상수 a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를
x 축의 방향으로
2 만큼 평행이동시키면
$y = \sqrt{a(x-2)}$
이 그래프와 곡선 $y = \dfrac{40}{x}$ 이 만나는 점의
x좌표는 10이므로
y좌표는 $y = \dfrac{40}{10} = 4$
즉 교점의 좌표는 $(10, 4)$
이것을 $y = \sqrt{a(x-2)}$ 대입하면
$4 = \sqrt{a(10-2)} = \sqrt{8a}$
$\therefore a = 2$



23. 다음 함수 중 그 그래프가 제 1, 3, 4 사분면을 지나는 것은?

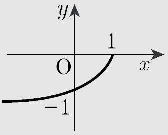
① $y = -\sqrt{1-x}$ ② $y = \sqrt{2x+4}-3$

③ $y = -\sqrt{2x+3}+3$ ④ $y = \sqrt{1-4x}+5$

⑤ $y = -\sqrt{6-2x}-1$

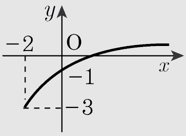
해설

① 제 3, 4 사분면을 지난다.



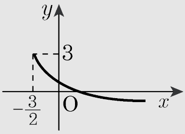
$y=-\sqrt{1-x}$

② 제 1, 3, 4 사분면을 지난다.



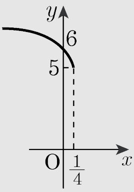
$y=\sqrt{2x+4}-3$

③ 제 1, 2, 4 사분면을 지난다.



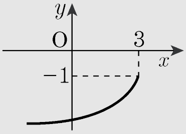
$y=-\sqrt{2x+3}+3$

④ 제 1, 2 사분면을 지난다.



$y=\sqrt{1-4x}+5$

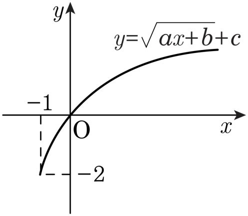
⑤ 제 3, 4 사분면을 지난다.



$y=-\sqrt{6-2x}-1$

따라서 그래프가 제 1, 3, 4 사분면을 지나는 것은 ②이다.

24. 함수 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

주어진 그래프에서 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프는 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 -1 만큼,
y 축의 방향으로 -2 만큼
평행이동한 것이므로
$y = \sqrt{ax+b}+c$
$\Leftrightarrow \; y = \sqrt{a(x+1)}-2$
이것이 원점을 지나므로 $0 = \sqrt{a(0+1)}-2$
$\therefore \; \sqrt{a} = 2 \; \Rightarrow \; a = 4$
$y = \sqrt{4x+4}-2$
$\therefore a+b+c = 4+4-2 = 6$

25. $8 \le x \le a$ 에서 함수 $y = -\sqrt{x+1}+3$ 의 최댓값이 b , 최솟값이 -1 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$y = -\sqrt{x+1}+3$ 의 그래프는 $y = -\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소한다.

$x = a$ 일 때 최솟값을 가지므로

$-1 = -\sqrt{a+1}+3 \quad \therefore \ a = 15$

$x = 8$ 일 때 최댓값을 가지므로

$b = -\sqrt{8+1}+3 = 0$

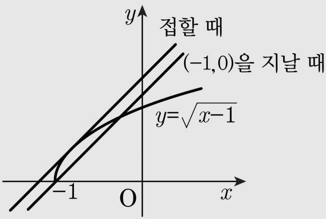
$\therefore \ a+b = 15+0 = 15$

26. 두 함수 $y = \sqrt{x+1}$과 $y = x+a$의 그래프가 서로 다른 두 개의 교점을 가지도록 상수 a의 값의 범위를 구하면?

① $1 \le a < \frac{5}{4}$　　② $1 < a < \frac{5}{4}$　　③ $1 \le a \le \frac{5}{4}$

④ $2 \le a < \frac{5}{4}$　　⑤ $1 \le a < 3$

해설



그림에서

(i) $y = x + a$가 점 $(-1,\ 0)$을 지날 때, $a = 1$

(ii) $y = x + a$ 와 $y = \sqrt{x+1}$ 이 접할 때

$x + a = \sqrt{x+1}$ 에서 양변을 제곱하면

$(x+a)^2 = x + 1$

$x^2 + (2a-1)x + a^2 - 1 = 0$

$\mathrm{D} = (2a-1)^2 - 4(a^2-1) = 0$

$-4a + 1 + 4 = 0 \Leftrightarrow 4a = 5$

$\therefore a = \frac{5}{4}$

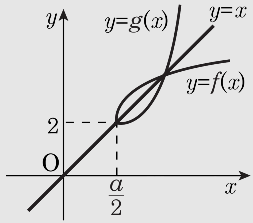
(i), (ii) $1 \le a < \frac{5}{4}$

27. 무리함수 $f(x) = \sqrt{2x-a}+2$의 그래프와 그 역함수 $y = g(x)$의 그래프의 두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$일 때, a의 값을 구하면?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ 4

해설

다음 그림에서 알 수 있듯
$y = f(x)$ 와 $y = g(x)$의 그래프의 교점은
$y = f(x)$의 그래프와
직선 $y = x$의 교점과 같다.



두 교점의 좌표를 각각 $(\alpha,\ \alpha)$, $(\beta,\ \beta)$라 하면
두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$이므로
$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2} = 2\sqrt{2}$
$\therefore (\alpha-\beta)^2 = 4 \cdots$ ①
한편, $f(x) = \sqrt{2}x - a + 2$ 와
$y = x$ 의 교점의 x 좌표는
$\sqrt{2x-a}+2 = x$에서 $\sqrt{2x-a} = x-2$
양변을 제곱하여 정리하면 $x^2-6x+4+a=0$
이 이차방정식의 두 근이 α, β 이므로
근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=4+a$
$(\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로 ①에서
$4 = 36-4(4+a),\ 4+a=8$
$\therefore a = 4$

28. $y = \sqrt{1-(x+1)^2}$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면?

① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ π ④ 2π ⑤ 4π

해설

$y = \sqrt{1-(x+1)^2}$ 에서

$1-(x+1)^2 \geq 0,\ x^2+2x \leq 0$

$\therefore -2 \leq x \leq 0$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x|-2 \leq x \leq 0\}$, 치역은 $\{y|y \geq 0\}$

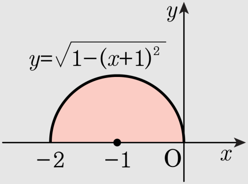
$y = \sqrt{1-(x+1)^2}$ 의 양변을

제곱하여 정리하면 $(x+1)^2+y^2=1$ 이므로

함수의 그래프는 다음 그림과 같다.

따라서 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}$



29. $f(5)=10$, $f(10)=30$ 이고 $g(x)=ax-10$ 인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $f^{-1}\circ g=f$ 를 만족하는 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=8$

해설

$f\circ(f^{-1}\circ g)=f\circ f$ 에서

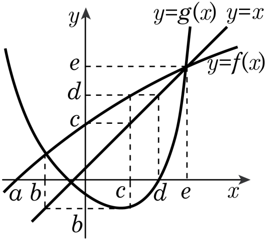
$g=f\circ f\cdots$ ㉠

$g(5)=f(f(5))=f(10)=30\cdots$ ㉡

$\therefore\ 5a-10=30$

따라서 구하는 a 의 값은 8 이다.

30. 다음 그림은 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$의 그래프를 나타낸 것이다. 함수 $h(x) = (f^{-1} \circ g \circ f)(x)$일 때, $h(c)$의 값은?



① a ② b ③ c

④ d ⑤ e

해설

$$h(c) = (f^{-1} \circ g \circ f)(c) = f^{-1}(g(f(c)))$$
$$= f^{-1}(g(d)) = f^{-1}(0)$$

$f^{-1}(0) = k$라 하면 $f(k) = 0$

$\therefore k = a$

따라서 $h(c) = a$

31. $a+b+c \neq 0$, $abc \neq 0$인 세 실수 a, b, c가 $\frac{b+c-a}{3a} = \frac{c+a-b}{3b} = \frac{a+b-c}{3c}$를 만족할 때, $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$\frac{b+c-a}{3a} = \frac{c+a-b}{3b} = \frac{a+b-c}{3c} = k$

$b+c-a = 3ak \cdots$ ㉠

$c+a-b = 3bk \cdots$ ㉡

$a+b-c = 3ck \cdots$ ㉢

㉠ + ㉡ + ㉢ : $a+b+c = 3(a+b+c)k$

$a+b+c \neq 0$ 이므로 $k = \frac{1}{3}$

$k = \frac{1}{3}$ 를 ㉠, ㉡, ㉢에 각각 대입하여 정리하면

$b+c = 2a,\ c+a = 2b,\ a+b = 2c$

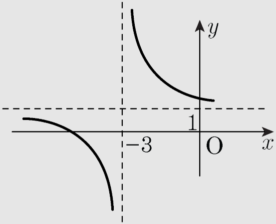
$\therefore \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = \frac{8abc}{abc} = 8$

32. 다음 중 함수 $y = \dfrac{x+6}{x+3}$의 그래프는 제a사분면을 지나지 않고, 점 $(0,\ b)$를 지난다고 할 때, $a-b$의 값은?

① -6 ② -4 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$$y = \frac{x+3+3}{x+3} = 1 + \frac{3}{x+3}$$



따라서 제4사분면을 지나지 않는다. $\therefore\ a = 4$

$x = 0$일 때 $y = \dfrac{6}{3} = 2$, $\therefore\ b = 2$

$\therefore\ a - b = 4 - 2 = 2$

33. $x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 일 때, $\dfrac{x}{x+\sqrt{x-1}} + \dfrac{x}{x-\sqrt{x-1}}$ 의 값을 구하면?

① $\dfrac{\sqrt{3}-2}{2}$ ② $\dfrac{2-\sqrt{3}}{3}$ ③ $\dfrac{\sqrt{5}+3}{2}$

④ $\dfrac{2+3\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$

해설

$$\frac{x}{x+\sqrt{x-1}} + \frac{x}{x-\sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{\left\{(x-\sqrt{x-1}) + (x+\sqrt{x-1})\right\} x}{(x+\sqrt{x-1})(x-\sqrt{x-1})}$$

$$= \frac{2x^2}{x^2-x+1}$$

$x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 에서 $2x-1 = \sqrt{5}$

양변을 제곱하면 $4x^2 - 4x + 1 = 5$

$\therefore\ x^2 = x+1$

$$\therefore (\text{준식}) = \frac{2x^2}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{2(x+1)}{(x+1)-x+1} = x+1$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{2} + 1 = \frac{\sqrt{5}+3}{2}$$

34. 함수 $y=\dfrac{ax+8}{x+b}$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=6$, $y=-1$ 일 때, 함수 $y=\sqrt{bx-a}$ 의 정의역에 속하는 정수의 최댓값은? (단, a, b 는 상수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$y=\dfrac{ax+8}{x+b}=\dfrac{8-ab}{x+b}+a$ 이고

점근선의 방정식이 $x=-b=6$, $y=a=-1$ 이므로 $a=-1$, $b=-6$

함수 $y=\sqrt{-6x+1}$ 의 정의역은 $\left\{x \mid x\le\dfrac{1}{6}\right\}$ 이므로 구하는 정수의 최댓값은 0 이다.

35. 두 함수 f, g 가 $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $g(x) = \sqrt{x}+1$ 일 때, $0 \le x \le 4$ 에서 함수 $y = (f \circ g)(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\dfrac{5}{4}$

해설

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}+1)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x}+1+1}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

$\sqrt{x} = t$ 로 놓으면

$0 \le x \le 4$ 에서 $0 \le t \le 2$ 이므로

주어진 함수는 $y = \dfrac{1}{t+2}(0 \le t \le 2)$

따라서 다음 그림에서 $t = 0$ 일 때

최댓값은 $\dfrac{1}{2}$,

$t = 2$ 일 때

최솟값은 $\dfrac{1}{4}$ 이므로

구하는 합은 $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$