1. $(1-3i)x+(3+2i)y=1+8i$를 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(1-3i)x+(3+2i)y=1+8i$,

$(x+3y)+(-3x+2y)i=1+8i$ 에서

복소수의 상등에 의하여

$x+3y=1,\ -3x+2y=8$ 이고

연립하여 풀면 $y=1,\ x=-2$

$\therefore\ x+y=-1$

2. $z_1 = 1 - i, z_2 = 1 + i$ 일 때, $z_1^3 + z_2^3$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $4 - 2i$ ② 0 ③ 20

④ $-2 + 4i$ ⑤ -4

해설

$z_1 + z_2 = 2,\ z_1 z_2 = 2$

$$\begin{aligned} z_1^3 + z_2^3 &= (z_1 + z_2)^3 - 3z_1 z_2 (z_1 + z_2) \\ &= 8 - 12 \\ &= -4 \end{aligned}$$

3. $x=-2-i$ 일 때, $x^2+4x+10$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x=-2-i$ 에서 $x+2=-i$ 의 양변을 제곱하면

$(x+2)^2=(-i)^2$ 이므로

$x^2+4x=-5$

$\therefore\ x^2+4x+10=-5+10=5$

4. x에 대한 이차방정식 $2mx^2+(5m+2)x+4m+1=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 m의 값은?

① $-\frac{3}{2}$, -2　② $-\frac{7}{12}$, $-\frac{1}{2}$　③ $-\frac{7}{2}$, 2
④ $-\frac{2}{7}$, 2　⑤ $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{2}$

해설

주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 중근을 가질 조건은 $D=0$이므로

$D=(5m+2)^2-4\cdot 2m\cdot(4m+1)=0$

$25m^2+20m+4-32m^2-8m=0$

$7m^2-12m-4=0$

$(7m+2)(m-2)=0$

$\therefore m=-\frac{2}{7}$ 또는 2

5. 이차함수 $y = 2x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 $x = -1$ 일 때, 최솟값 4 를 갖는 이차함수의 식은?

① $y = 2(x-1)^2$

② $y = 2(x-1)^2 + 4$

③ $y = 2(x+1)^2 + 4$

④ $y = -2(x+1)^2 + 4$

⑤ $y = -2(x-1)^2 + 4$

해설

$y = 2x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 꼭짓점이 $(-1, 4)$ 이므로 $y = 2(x+1)^2 + 4$

6. x의 범위가 $-1 \leq x \leq 2$ 일 때, 이차함수 $y = -2x^2 + 4x + 1$ 의 최댓값을 구하면?

① -2　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$y = -2(x-1)^2 + 3$

$\therefore x = 1$ 일 때, 최댓값 3

7. 방정식 $x^6 - 1 = 0$의 해가 <u>아닌</u> 것은?

① -1　② 1　③ $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

④ $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$　⑤ $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$

해설

$$x^6-1=(x^3+1)(x^3-1)=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)=0$$

$$\Rightarrow x=-1,\ 1,\ \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

8. 연립방정식 $\begin{cases} x-2y=1 \\ xy-y^2=6 \end{cases}$ 의 해를 구하면 $x=p,\ y=q$또는 $x=r,\ y=s$이다. $p+q+r+s$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$\begin{cases} x-2y=1 & \cdots ㉠ \\ xy-y^2=6 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x=2y+1 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$y^2+y-6=0(y-2)(y+3)=0$

$\therefore\ y=2,\ -3$

$y=2,\ y=-3$을 ㉢에 대입하면

각각 $x=5,\ x=-5$

$\therefore\ x=5,\ y=2$ 또는 $x=-5,\ y=-3$

9. 방정식 $a(ax-1)=2(ax-1)$ 에 대한 설명으로 옳은 것은?

① $a=0$ 일 때, 부정

② $a=2$ 일 때, 불능

③ $a\neq 2$ 일 때, $x=\dfrac{1}{a}$

④ $a\neq 0$ 일 때, 해는 없다.

⑤ $a\neq 0,\ a\neq 2$ 일 때, $x=\dfrac{1}{a}$

해설

$a(ax-1)=2(ax-1), a^2x-2ax=a-2$에서

$a(a-2)x=a-2$

i) $a\neq 0,\ a\neq 2$일 때, $x=\dfrac{1}{a}$

ii) $a=2$일 때, $0\cdot x=0$이므로 해는 무수히 많다. (부정)

iii) $a=0$일 때, $0\cdot x=-2$이므로 해가 없다. (불능)

따라서 옳은 것은 ⑤뿐이다.

10. x에 대한 2차 방정식 $x^2-2ax+a^2+ka-2k+b=0$이 k값에 관계없이 중근을 가질 때, $a+b$의 값은?

① 4 ② 8 ③ 2 ④ -2 ⑤ 15

해설

중근이면 판별식이 0이다.

$\Rightarrow \quad D' = a^2-(a^2+ka-2k+b)=0$

$-ka+2k-b=0$

$k(2-a)-b=0$

$\therefore \quad a=2 \quad b=0 \quad a+b=2$

11. x에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + a + 1 = 0$의 두 근이 연속인 정수가 되게하는 상수 a의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

두 근을 $n,\ n+1$이라 하면

$$\begin{cases} n + (n+1) = a \cdots\cdots ㉠ \\ n(n+1) = a + 1 \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $n = \dfrac{a-1}{2} \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면

$$\frac{a-1}{2}\left(\frac{a-1}{2} + 1\right) = a + 1$$

이것을 정리하면 $(a+1)(a-5) = 0$

$a = -1,\ 5$

$\therefore -1 + 5 = 4$

12. 이차함수 $y=x^2-2ax+a^2-1$ 의 그래프가 a 의 값에 관계없이 직선 $y=mx+n$ 과 접할 때, 상수 m, n 에 대하여 $m+n$ 의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

이차함수 $y=x^2-2ax+a^2-1$ 의 그래프와
직선 $y=mx+n$ 이 접하므로
$x^2-2ax+a^2-1=mx+n$
즉 $x^2-(2a+m)x+a^2-1-n=0$ 에서
$D=(2a+m)^2-4(a^2-1-n)=0$
$\therefore\ 4ma+(m^2+4+4n)=0$
이 식이 a 의 값에 관계없이 성립하므로
$4m=0$, $m^2+4+4n=0$
두 식을 연립하여 풀면 $m=0$, $n=-1$
$\therefore\ m+n=-1$

13. 삼차방정식 $x^3 - 4x^2 + x + k = 0$의 한 근이 -1일 때, k의 값과 나머지 두 근의 합은?

① 10　　② 11　　③ 12　　④ 13　　⑤ 14

해설

$x = -1$을 대입하면

$(-1)^3 - 4 - 1 + k = 0 \quad \therefore k = 6$

$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$의 나머지 두 근을 α, β라 하면

세 근의 합 $4 = -1 + \alpha + \beta$에서 $\alpha + \beta = 5$

$\therefore k + \alpha + \beta = 11$

14. 삼차방정식 $x^3 - ax - b = 0$의 한 근이 $1 - \sqrt{2}$일 때, 유리수 a, b에 대하여 $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

방정식 $x^3 - ax - b = 0$의 계수가 유리수이므로
세 근을 $1 - \sqrt{2}$, $1 + \sqrt{2}$, α라고 하면

$$\left(1 - \sqrt{2}\right) + \left(1 + \sqrt{2}\right) + \alpha = 0 \quad \cdots ㉠$$

$$\left(1 - \sqrt{2}\right)\left(1 + \sqrt{2}\right) + \left(1 + \sqrt{2}\right)\alpha + \left(1 - \sqrt{2}\right)\alpha = -a \quad \cdots ㉡$$

$$\left(1 - \sqrt{2}\right)\left(1 + \sqrt{2}\right)\alpha = b \quad \cdots ㉢$$

㉠에서 $\alpha = -2$를 ㉡에 대입하면
$-a = 1 - 2 - 2 - 2\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} = -5 \quad \therefore\ a = 5$
$\alpha = -2$를 ㉢에 대입하면 $b = -2(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = 2$
$\therefore\ a + b = 5 + 2 = 7$

15. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=0 \\ x^2+2xy-3y^2=-4 \end{cases}$ 의 해를 $x=a$, $y=b$라 할 때, 다음 중 a 또는 b의 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　② $\dfrac{1}{3}$　③ $-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

④ $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　⑤ -1

해설

$$\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=0 & \cdots ① \\ x^2+2xy-3y^2=-4 & \cdots ② \end{cases}$$

①에서 $(x+y)(x+2y)=0$,

$x=-y, x=-2y$

i) $x=-y$를 ②에 대입 $y^2=1$

$\therefore\ y=\pm1, x=\pm1$(복호동순)

ii) $x=-2y$를 ②에 대입 $y^2=\dfrac{4}{3}$

$\therefore\ y=\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, x=\mp\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$(복호동순)

그러므로 x, y값이 될 수 없는 것은

② $\dfrac{1}{3}$

16. 방정식 $x^2+2x+1+y^2-4y+4=0$을 만족하는 두 실수 x, y의 합 $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^2+2x+1+y^2-4x+4=0$ 에서

$(x+1)^2+(y-2)^2=0$

x, y 는 실수이므로 $x=-1$, $y=2$

$\therefore\ x+y=-1+2=1$

17. 방정식 $xy+2x=3y+10$을 만족하는 양의 정수가 $x=\alpha,\ y=\beta$일 때, $\alpha\beta$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

주어진 식을 변형하면

$xy+2x-3y=10,\ xy+2x-3y-6=4,$

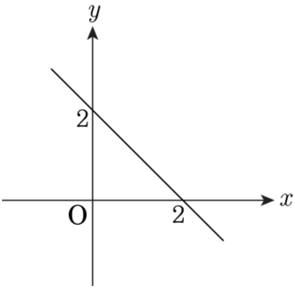
$(x-3)(y+2)=4$

$y+2\geq 3$이므로 두 자연수의 곱이 4가 되는 경우는

$x-3=1,\ y+2=4$

$\therefore\ x=4,\ y=2$

18. 다음 그림은 일차함수 $y=ax+b$ 의 그래프이다. 이차함수 $y=\frac{1}{2}ax^2+bx+3$ 의 그래프의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

기울기 $a=-1$, y 절편 $b=2$

$$y=\frac{1}{2}ax^2+bx+3$$
$$=-\frac{1}{2}x^2+2x+3$$
$$=-\frac{1}{2}(x-2)^2+5$$

$x=2$ 일 때, 최댓값은 5 이다.

19. $x + y = 10$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 최솟값을 구하면?

① 10　② 24　③ 40　④ 45　⑤ 50

해설

$y = 10 - x$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= x^2 + (10 - x)^2 \\ &= x^2 + x^2 - 20x + 100 \\ &= 2x^2 - 20x + 100 \\ &= 2(x^2 - 10x + 25 - 25) + 100 \\ &= 2(x - 5)^2 + 50 \end{aligned}$$

따라서 $x = 5$ 일 때 최솟값은 50 이다.

20. 밑면의 길이와 높이의 합이 28 인 삼각형의 넓이가 최대가 될 때 밑변과 높이의 길이를 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 밑변 : 14

▷ 정답 : 높이 : 14

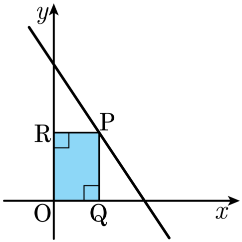
해설

삼각형의 넓이를 y 라 하면, 밑변을 x , 높이는 $28-x$라 두면

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x(28-x) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + 14x \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 - 28x + 196 - 196) \\ &= -\frac{1}{2}(x-14)^2 + 196 \end{aligned}$$

따라서 밑변은 14 , 높이는 14이다.

21. 직선 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ 위를 움직이는 한 점 P 가 있다. 점 P 에서 x 축, y 축 위에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 라고 할 때, 직사각형 OQPR 의 넓이의 최댓값을 구하여라. (단, 점 P 는 제 1 사분면 위에 있다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{3}{2}$

해설

직선의 방정식은 $y=-\frac{3}{2}x+3$ 이므로

점 P 의 좌표를 $(a,\ b)$ 로 놓으면 $b=-\frac{3}{2}a+3$

$$\square\mathrm{OQPR}=ab=a\left(-\frac{3}{2}a+3\right)$$
$$=-\frac{3}{2}a^2+3a$$
$$=-\frac{3}{2}(a-1)^2+\frac{3}{2}$$

한편, 점 P 는 제 1 사분면 위의 점이므로

$a>0,\ b=-\frac{3}{2}a+3>0 \qquad \therefore\ 0<a<2$

따라서 $\square$OQPR 의 넓이는 $a=1$ 일 때, 최댓값 $\frac{3}{2}$ 을 갖는다.

22. 사차방정식 $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$의 근 중에서 제일 큰 근을 α, 제일 작은 근을 β라 할 때, $\alpha - \beta$의 값은?

① $\sqrt{5}$ ② $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ ③ $1 - \sqrt{5}$

④ $2 - \sqrt{5}$ ⑤ $3 - \sqrt{5}$

해설

양근을 x^2 으로 나누면

$$x^2 - 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x}^{2} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$$

$x + \dfrac{1}{x} = t$라 하면

$t^2 - 5t + 6 = 0 \rightarrow t = 2,\ 3$

i) $t = 2$일 때

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$\therefore\ x = 1$

ii) $t = 3$일 때

$x^2 - 3x + 1 = 0$

$\therefore\ x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\therefore\ \alpha - \beta = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2} - \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$

23. $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}i}{2}$ 에 대하여 $z = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$ 이라 할 때, $7z\bar{z}$ 의 값을 구하시오.
(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 복소수 $x,\ y$ 에 대하여 $\overline{\left(\dfrac{y}{x}\right)} = \dfrac{\bar{y}}{\bar{x}}$ 이다.

$z = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$ 에서 $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}i}{2}$ 이므로
직접 α 를 대입하여 z 를 구하고 $\bar{z}$ 를 구해서 풀 수도 있지만 그렇게 하면 계산이 너무 어려워진다.
따라서 복소수의 켤레복소수의 성질을 이용하여 풀도록 시도해 보자.

주어진 문제에서 $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}i}{2}$

이므로 $\bar{\alpha} = \dfrac{1-\sqrt{5}i}{2}$ 이다.

따라서, $\alpha + \bar{\alpha} = 1,\ \alpha\bar{\alpha} = \dfrac{3}{2}$ 이고

$z = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha + 1},\ \bar{z} = \dfrac{\bar{\alpha} - 1}{\bar{\alpha} + 1}$ 이므로

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= \frac{(\alpha - 1)(\bar{\alpha} - 1)}{(\alpha + 1)(\bar{\alpha} + 1)} \\ &= \frac{\alpha\bar{\alpha} - (\alpha + \bar{\alpha}) + 1}{\alpha\bar{\alpha} + (\alpha + \bar{\alpha}) + 1} \\ &= \frac{\frac{3}{2} - 1 + 1}{\frac{3}{2} + 1 + 1} \\ &= \frac{3}{7} \end{aligned}$$

$\therefore\ 7z\bar{z} = 7 \times \dfrac{3}{7} = 3$

24. x에 관한 이차방정식 $x^2+nx+p=0$의 두 근을 α, β라 하고, $x^2+nx+q=0$의 두 근을 γ, δ라 할 때, $(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)$를 p, q로 나타내면?

① $(p+q)^2$ ② $(2p+q)^2$ ③ $(p-2q)^2$
④ $(p-q)^2$ ⑤ $(2p-3q)^2$

해설

근과 계수와의 관계에서
$\alpha+\beta=-n,\ \alpha\beta=p,\ \gamma+\delta=-n,\ \gamma\delta=q$이므로
주어진 식 $=\{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)\}\{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)\}$
$=\{\gamma^2-(\alpha+\beta)\gamma+\alpha\beta\}\{\delta^2-(\alpha+\beta)\delta+\alpha\beta\}$
$=(\gamma^2+n\gamma+p)(\delta^2+n\delta+p)$
그런데, $\gamma^2+n\gamma+q=0$에서
$\gamma^2+n\gamma+p=p-q$
또, $\delta^2+n\delta+q=0$에서
$\delta^2+n\delta+p=p-q$
따라서, 주어진 식$=(p-q)^2$

25. 함수 $f(x)=\frac{x^2}{4}+a(x\geq 0)$ 의 역함수 $g(x)$ 에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$ 가 서로 다른 두 양의 실근을 가질 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $0\leq a<1$　② $a\geq 0$　③ $a<1$

④ $0<a<1$　⑤ $a<2$

해설

$f(x)=\frac{x^2}{4}+a(x\geq 0)$ 와 그 역함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있다.

따라서, 방정식 $\frac{x^2}{4}+a=x$,

즉 $x^2-4x+4a=0$ 이 서로 다른 두 양의 실근을 갖는다.

$x^2-4x+4a=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$\alpha+\beta=4>0$ ······㉠

$\alpha\beta=4a>0,\ a>0$ ······㉡

$\frac{D}{4}=4-4a>0,\ a<1$ ······㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $0<a<1$