

1. 두 직선 $3x + 2y + 1 = 0$, $x + 3y - 2 = 0$ 의 교점과 직선 $3x - y + 2 = 0$ 사이의 거리를 구하면?

- ① $\frac{\sqrt{7}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{7}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{15}}{5}$

해설

$$3x + 2y + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x + 3y - 2 = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \times 3 \text{에서 } -7y + 7 = 0$$

$$\therefore y = 1, x = -1$$

따라서, 교점의 좌표는 $(-1, 1)$ 이다.

점 $(-1, 1)$ 과 직선 $3x - y + 2 = 0$

사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|3 \times (-1) - 1 + 2|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

2. 점 (2, 1)에서 직선 $y = x + 1$ 에 이르는 거리는?

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

$y = x + 1$ 은 $x - y + 1 = 0$ 이다.

점(2, 1)에서 $x - y + 1 = 0$ 에 이르는 거리는

$$\frac{|2 - 1 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

3. 세 직선 $x + 2y = 5$, $2x - 3y = 4$, $ax + y = 0$ 이 삼각형을 이루지 못할 때, 상수 a 의 값들의 곱은?

- ① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{3}{23}$ ③ $-\frac{1}{23}$ ④ $\frac{2}{23}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

해설

주어진 세 직선이 일치하는 경우는 없으므로 삼각형을 이루지 못하는 것은 두 직선이 서로 평행해서 교점이 두 개만 생기거나 세 직선이 모두 한 점에서 만나는 경우이다.

(i) 두 직선이 평행한 경우 세 직선의 기울기는

각각 $-\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $-a$ 이므로

$a = \frac{1}{2}$ 또는 $a = -\frac{2}{3}$ 이면 두 직선이 평행하다.

(ii) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

$x + 2y = 5$ 와 $2x - 3y = 4$ 의 교점은 $\left(\frac{23}{7}, \frac{6}{7}\right)$

이 점이 $ax + y = 0$ 위에 있으려면 $a = -\frac{6}{23}$

(i), (ii)에서 $a = \frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{6}{23}$

따라서 세 수의 곱은 $\frac{2}{23}$

4. 세 직선 $2x - y - 4 = 0$, $x - 2y - 2 = 0$, $y = ax + 2$ 가 오직 한 점에서 만날 때, 상수 a 의 값은?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

해설

세 직선이 한 점에서 만나려면 두 직선의 교점을 나머지 한 직선이 지나야 한다.

$$2x - y - 4 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$x - 2y - 2 = 0 \cdots \textcircled{2}$$

$y = ax + 2 \cdots \textcircled{3}$ 이라 할 때,

①, ②의 교점이 ③위에 있으면, 한 점에서 만나므로

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{를 연립하여 풀면 } x = 2, y = 0$$

두 직선의 교점 (2, 0) 이 직선 $y = ax + 2$ 를 지나면 한 점에서 만나므로

$$0 = 2a + 2, 2a = -2$$

$$\therefore a = -1$$

5. 직선 $2x+4y+1=0$ 에 평행하고, 두 직선 $x-2y+10=0$, $x+3y-5=0$ 의 교점을 지나는 직선을 $y=ax+b$ 라 할 때 $2a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

직선 $2x+4y+1=0$ 의 기울기는

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \text{ 에서 } -\frac{1}{2}$$

또, $x-2y+10=0$, $x+3y-5=0$ 을 연립하여 풀면

$$x = -4, y = 3$$

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x + 4)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x + 1 \text{ 이므로}$$

$$a = -\frac{1}{2}, b = 1$$

$$\therefore 2a + b = 0$$

6. 두 직선 $2x + y - 7 = 0$, $3x + 2y - 12 = 0$ 의 교점을 지나고 직선 $8x + 5y = 0$ 에 평행한 직선의 방정식은?

① $y = -\frac{5}{8}x + \frac{5}{31}$ ② $y = -\frac{8}{5}x + \frac{31}{5}$ ③ $y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{5}$
④ $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{11}$ ⑤ $y = -\frac{5}{3}x + \frac{11}{31}$

해설

$$2x + y - 7 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$3x + 2y - 12 = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \times 2 - \textcircled{2} : x = 2, y = 3$$

$$\therefore \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{의 교점} : (2, 3)$$

$$\text{구하는 직선의 기울기는 } -\frac{8}{5}$$

$$\left(\because y = -\frac{8}{5}x \text{ 와 평행하다. } \right)$$

$$\therefore \text{구하는 직선은 기울기 } -\frac{8}{5} \text{ 이고}$$

$$(2, 3) \text{ 을 지나므로}$$

$$y - 3 = -\frac{8}{5}(x - 2)$$

$$\therefore y = -\frac{8}{5}x + \frac{31}{5}$$

7. 다음 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 구하여라.

(0,0), (2,6), (6,3)

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$$\frac{1}{2}|2 \cdot 3 - 6 \cdot 6| = 15$$

8. A(0, -2), B(3, 3), C(4, 0) 인 $\triangle ABC$ 의 넓이는?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

$$\overline{BC} = \sqrt{(4-3)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{10}$$

또, 직선 BC의 방정식은 $3x + y - 12 = 0$ 이므로

A(0, -2)로부터 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} = \frac{|-2-12|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{14}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AH} = 7$$

9. 직선 $x+ay-1=0$ 과 x 축, y 축의 양의 부분으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 $\frac{1}{4}$ 일 때, a 의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

해설

$y = -\frac{1}{a}x + \frac{1}{a}$ 의 x 절편은 $(1, 0)$ y 절편은 $(0, \frac{1}{a})$ 이다.

$\therefore$ 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{a} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = 2$

10. 두 점 $(-1, 2), (3, 4)$ 를 지나는 직선이 x 축, y 축과 각각 점 A, B 에서 만날 때, 삼각형 OAB 의 넓이는? (단 O 는 원점)

- ① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{25}{4}$ ④ $\frac{24}{5}$ ⑤ $\frac{37}{6}$

해설

두 점 $(-1, 2), (3, 4)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $y - 4 = \frac{4 - 2}{3 - (-1)}(x - 3)$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

$y = 0$ 을 대입하면

$$0 = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}, x = -5$$

따라서 x 축과 만나는 점 A 의 좌표는 $A(-5, 0)$

㉠의 y 절편이 $\frac{5}{2}$ 이므로

y 축과 만나는 점 B 의 좌표는 $B(0, \frac{5}{2})$,

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{4}$$

11. 두 점 A(2, 1), B(-1, 3)을 연결한 선분 AB와 직선 $l: y = k(x+2)+2$ 가 공유점을 가질 k 의 범위는 $\alpha \leq k \leq \beta$ 이다. 이 때, $\alpha + \beta$ 의 값은?

- ① $\frac{3}{4}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$y = k(x+2) + 2$, $k(x+2) + 2 - y = 0$ 은
 k 에 관계없이 $x+2=0$, $2-y=0$ 의 교점
 즉, $(-2, 2)$ 를 지난다.

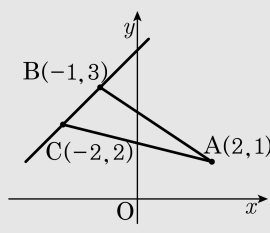
이 점을 C라 하면 선분 AB와 직선 l
 이

만나려면 그림에서 l 의 기울기 k 가
 l_2 의 기울기보다 작거나 같아야하고,
 l_3 의 기울기보다 크거나 같아야한다.

$$\beta = (l_2 \text{의 기울기}) = \frac{2-3}{-2-(-1)} = 1$$

$$\alpha = (l_3 \text{의 기울기}) = \frac{2-1}{-2-2} = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore \alpha + \beta = 1 + \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

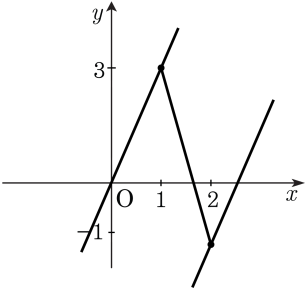


12. 직선 $3x - y + k = 0$ 이 두 점 $(1, 3)$, $(2, -1)$ 을 잇는 선분과 만나도록 k 값의 범위를 정하면?

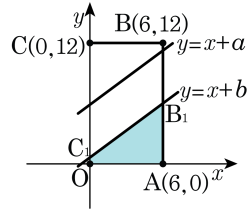
- ① $-6 \leq k \leq 0$
- ② $-7 \leq k \leq 0$
- ③ $-6 \leq k \leq 1$
- ④ $-7 \leq k \leq 1$
- ⑤ $-5 \leq k \leq 1$

해설

다음 그림에서와 같이 $y = 3x + k$ 가 조건을 만족하기 위해서는
i) $(1, 3)$ 에서 만날 때, $3 = 3 + k$
 $\therefore k = 0$
ii) $(2, -1)$ 에서 만날 때, $-1 = 6 + k$
 $\therefore k = -7$
 $\therefore -7 \leq k \leq 0$

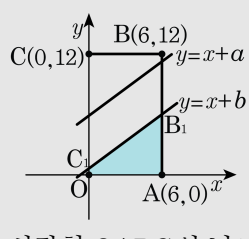


13. 네 점 $O(0,0)$, $A(6,0)$, $B(6,12)$, $C(0,12)$ 를 꼭지점으로 하는 사각형 $OABC$ 가 있다. 그림과 같이 두 직선 $y = x + a$, $y = x + b$ 가 사각형 $OABC$ 의 넓이를 삼등분할 때, ab 의 값은?



- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설



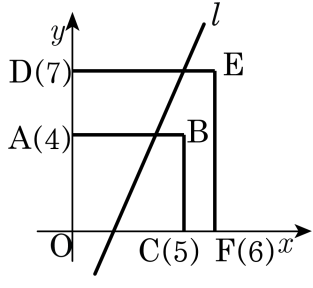
사각형 $OABC$ 의 넓이가 72이므로
사각형 OAB_1C_1 의 넓이는 24이다.

$$\frac{1}{2}(b + 6 + b) \times 6 = 24 \text{ 이므로 } b = 1$$

같은 방법으로 $a = 5$

$$\therefore ab = 5$$

14. 아래 그림에서 직선 l 이 두 직사각형 $\square OABC$ 와 $\square ODEF$ 의 넓이를 동시에 이등분할 때, 직선 $l: y = ax + b$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하면?



- ① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

평행사변형의 넓이를 이등분하는 직선은 두 대각선의 중점을 지나는 직선이다.



따라서, $\square OABC$ 와 $\square ODEF$ 의 넓이를 동시에 이등분하는 직선 l 은 두 직사각형의 중점을 지날때이다.

$\square OABC$ 의 중점 : $\left(\frac{5}{2}, \frac{4}{2}\right)$

$\square ODEF$ 의 중점 : $\left(\frac{6}{2}, \frac{7}{2}\right)$ 이므로

$$y = 3x - \frac{11}{2} \therefore a = 3, b = -\frac{11}{2}$$

$$\therefore a + b = 3 - \frac{11}{2} = -\frac{5}{2}$$

해설

직선이 두 사각형과 만나는 점은

$\left(\frac{4-b}{a}, 4\right), \left(\frac{7-b}{a}, 7\right)$ 이다.

이제 각각의 오른쪽 사다리꼴의 넓이를 구해보면

$$\text{i) } \square OABC : \frac{4}{2} \left(\left(5 + \frac{b}{a}\right) + \left(5 - \frac{4b}{a}\right) \right) = 10$$

$$\Rightarrow 2b - 4 + 5a = 0$$

$$\text{ii) } \square ODEF : \frac{7}{2} \left(\left(6 + \frac{b}{a}\right) + \left(6 - \frac{7-b}{a}\right) \right) = 21$$

$$\Rightarrow 6a + 2b - 7 = 0$$

i)과 ii)를 연립하면

$$a = 3, b = -\frac{11}{2} \therefore a + b = 3 - \frac{11}{2} = -\frac{5}{2}$$