1. 두 직선 $3x+2y+1=0$, $x+3y-2=0$의 교점과 직선 $3x-y+2=0$ 사이의 거리를 구하면?

① $\frac{\sqrt{7}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{7}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{15}}{5}$

해설

$3x+2y+1=0 \cdots\cdots$ ㉠

$x+3y-2=0 \cdots\cdots$ ㉡

㉠ $-$ ㉡ $\times 3$에서 $-7y+7=0$

$\therefore\ y=1,\ x=-1$

따라서, 교점의 좌표는 $(-1,1)$이다.

점 $(-1,1)$과 직선 $3x-y+2=0$

사이의 거리 d는

$$d=\frac{|3\times(-1)-1+2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

2. 점 $(2,\ 1)$에서 직선 $y=x+1$에 이르는 거리는?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

$y=x+1$은 $x-y+1=0$이다.

점$(2,\ 1)$에서 $x-y+1=0$에 이르는 거리는

$$\frac{|2-1+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

3. 세 직선 $x+2y=5$, $2x-3y=4$, $ax+y=0$이 삼각형을 이루지 못할 때, 상수 a의 값들의 곱은?

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{3}{23}$ ③ $-\frac{1}{23}$ ④ $\frac{2}{23}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

해설

주어진 세 직선이 일치하는 경우는 없으므로
삼각형을 이루지 못하는 것은 두 직선이
서로 평행해서 교점이 두 개만 생기거나
세 직선이 모두 한 점에서 만나는 경우이다.

(i) 두 직선이 평행한 경우 세 직선의 기울기는
각각 $-\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $-a$이므로
$a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=-\frac{2}{3}$이면 두 직선이 평행하다.

(ii) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우
$x+2y=5$ 와 $2x-3y=4$의 교점은 $\left(\frac{23}{7}, \frac{6}{7}\right)$
이 점이 $ax+y=0$ 위에 있으려면 $a=-\frac{6}{23}$

(i), (ii)에서 $a=\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{6}{23}$

따라서 세 수의 곱은 $\frac{2}{23}$

4. 세 직선 $2x-y-4=0$, $x-2y-2=0$, $y=ax+2$ 가 오직 한 점에서 만날 때, 상수 a 의 값은?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

해설

세 직선이 한 점에서 만나려면 두 직선의 교점을 나머지 한 직선이 지나야 한다.

$2x-y-4=0 \cdots$ ㉠

$x-2y-2=0 \cdots$ ㉡

$y=ax+2 \quad \cdots$ ㉢이라 할 때,

㉠, ㉡의 교점이 ㉢위에 있으면, 한 점에서 만나므로

㉠, ㉡를 연립하여 풀면 $x=2$, $y=0$

두 직선의 교점 $(2,\ 0)$ 이 직선 $y=ax+2$ 를 지나면 한 점에서 만나므로

$0=2a+2$, $2a=-2$

$\therefore \quad a=-1$

5. 직선 $2x+4y+1=0$에 평행하고, 두 직선 $x-2y+10=0$, $x+3y-5=0$의 교점을 지나는 직선을 $y=ax+b$라 할 때 $2a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

직선 $2x+4y+1=0$의 기울기는

$y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ 에서 $-\frac{1}{2}$

또, $x-2y+10=0$, $x+3y-5=0$을 연립하여 풀면

$x=-4,\ y=3$

$y-3=-\frac{1}{2}(x+4)$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x+1$이므로

$a=-\frac{1}{2}$, $b=1$

$\therefore\ \ 2a+b=0$

6. 두 직선 $2x+y-7=0$, $3x+2y-12=0$ 의 교점을 지나고 직선 $8x+5y=0$ 에 평행한 직선의 방정식은?

① $y=-\frac{5}{8}x+\frac{5}{31}$ ② $y=-\frac{8}{5}x+\frac{31}{5}$ ③ $y=-\frac{2}{3}x+\frac{11}{5}$

④ $y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{11}$ ⑤ $y=-\frac{5}{3}x+\frac{11}{31}$

해설

$2x+y-7=0 \cdots\cdots$ ㉠

$3x+2y-12=0 \cdots\cdots$ ㉡

㉠ $\times 2-$ ㉡ : $x=2,\ y=3$

$\therefore$ ㉠, ㉡의 교점 : $(2,\ 3)$

구하는 직선의 기울기는 $-\frac{8}{5}$

$\left(\because\ y=-\frac{8}{5}x \text{ 와 평행하다.}\right)$

$\therefore$ 구하는 직선은 기울기 $-\frac{8}{5}$ 이고

$(2,\ 3)$ 을 지나므로

$y-3=-\frac{8}{5}(x-2)$

$\therefore y=-\frac{8}{5}x+\frac{31}{5}$

7. 다음 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 구하여라.

$$(0, 0),\ (2, 6),\ (6, 3)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$$\frac{1}{2}|2 \cdot 3 - 6 \cdot 6| = 15$$

8. $A(0,-2), B(3,3), C(4,0)$ 인 $\triangle ABC$ 의 넓이는?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$\overline{BC} = \sqrt{(4-3)^2+(0-3)^2} = \sqrt{10}$

또, 직선 BC 의 방정식은 $3x+y-12=0$ 이므로

$A(0,-2)$ 로부터 직선 BC 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{AH} = \frac{|-2-12|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{14}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{AH} = 7$$

9. 직선 $x+ay-1=0$ 과 x 축, y 축의 양의 부분으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 $\frac{1}{4}$ 일 때, a 의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $a=2$

해설

$y=-\frac{1}{a}x+\frac{1}{a}$ 의 x 절편은 $(1,\ 0)$ y 절편은 $(0, \frac{1}{a})$ 이다.

$\therefore$ 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{a}=\frac{1}{4} \Rightarrow a=2$

10. 두 점 $(-1, 2), (3, 4)$ 를 지나는 직선이 x 축, y 축과 각각 점 A, B 에서 만날 때, 삼각형 OAB 의 넓이는? (단 O 는 원점)

① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{25}{4}$ ④ $\frac{24}{5}$ ⑤ $\frac{37}{6}$

해설

두 점 $(-1, 2), (3, 4)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $y - 4 = \frac{4-2}{3-(-1)}(x-3)$

$\therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

$y = 0$ 을 대입하면

$0 = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}, x = -5$

따라서 x 축과 만나는 점 A 의 좌표는 $\mathrm{A}(-5, 0)$

㉠의 y 절편이 $\frac{5}{2}$ 이므로

y 축과 만나는 점 B 의 좌표는 $\mathrm{B}(0, \frac{5}{2})$,

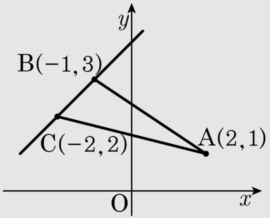
$\triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{4}$

11. 두 점 A(2, 1), B(−1, 3)을 연결한 선분 AB 와 직선 $l : y = k(x+2)+2$ 가 공유점을 가질 k 의 범위는 $\alpha \le k \le \beta$ 이다. 이 때, $\alpha+\beta$ 의 값은?

① $\frac{3}{4}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$y = k(x+2)+2$, $k(x+2)+2-y=0$ 은
k 에 관계없이 $x+2=0$, $2-y=0$ 의 교점
즉, $(-2, 2)$ 를 지난다.
이 점을 C 라 하면 선분 AB 와 직선 l 이
만나려면 그림에서 l 의 기울기 k가
l_2 의 기울기보다 작거나 같아야하고,
l_3 의 기울기보다 크거나 같아야한다.



$$\beta = (l_2 \text{ 의 기울기}) = \frac{2-3}{-2-(-1)} = 1$$

$$\alpha = (l_3 \text{ 의 기울기}) = \frac{2-1}{-2-2} = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore\ \alpha+\beta = 1 + \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

12. 직선 $3x-y+k=0$ 이 두 점 $(1,\ 3)$, $(2,\ -1)$ 을 잇는 선분과 만나도록 k 값의 범위를 정하면?

① $-6 \le k \le 0$　② $-7 \le k \le 0$　③ $-6 \le k \le 1$

④ $-7 \le k \le 1$　⑤ $-5 \le k \le 1$

해설

다음 그림에서와 같이 $y=3x+k$ 가 조건을 만족하기 위해서는

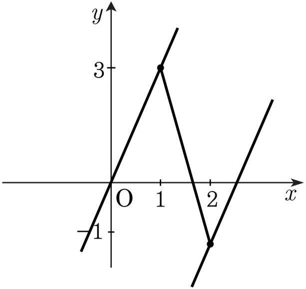
i)$(1,\ 3)$ 에서 만날 때, $3=3+k$

$\therefore\ k=0$

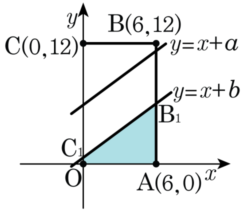
ii)$(2,\ -1)$ 에서 만날 때, $-1=6+k$

$\therefore\ k=-7$

$\therefore\ -7 \le k \le 0$

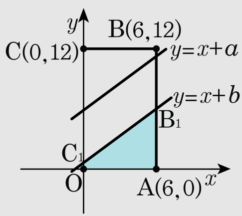


13. 네 점 O$(0,0)$, A$(6,0)$, B$(6,12)$, C$(0,12)$를 꼭지점으로 하는 사각형 OABC가 있다. 그림과 같이 두 직선 $y=x+a$, $y=x+b$가 사각형 OABC의 넓이를 삼등분할 때, ab의 값은?



① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설



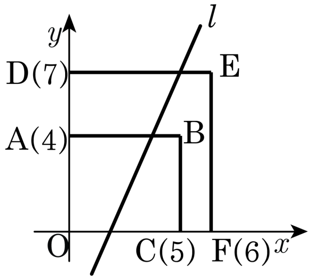
사각형 OABC의 넓이가 72이므로
사각형 OAB_1C_1의 넓이는 24이다.

$\frac{1}{2}(b+6+b)\times 6=24$이므로 $b=1$

같은 방법으로 $a=5$

$\therefore\ ab=5$

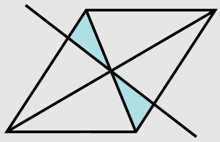
14. 아래 그림에서 직선 l이 두 직사각형 □OABC와 □ODEF의 넓이를 동시에 이등분할 때, 직선 $l: y = ax + b$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하면?



① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

평행사변형의 넓이를 이등분하는 직선은 두 대각선의 중점을 지나는 직선이다.



따라서, □OABC와 □ODEF의 넓이를 동시에 이등분하는 직선 l은 두 직사각형의 중점을 지날때이다.

□OABC의 중점 : $\left(\frac{5}{2}, \frac{4}{2}\right)$

□ODEF의 중점 : $\left(\frac{6}{2}, \frac{7}{2}\right)$ 이므로

$y = 3x - \frac{11}{2}$ $\therefore$ $a = 3, b = -\frac{11}{2}$

$\therefore$ $a + b = 3 - \frac{11}{2} = -\frac{5}{2}$

해설

직선이 두 사각형과 만나는 점은

$\left(\frac{4-b}{a}, 4\right), \left(\frac{7-b}{a}, 7\right)$ 이다.

이제 각각의 오른쪽 사다리꼴의 넓이를 구해보면

ⅰ)□OABC : $\frac{4}{2}((5+\frac{b}{a}) + (5 - \frac{4b}{a})) = 10$

$\Rightarrow$ $2b - 4 + 5a = 0$

ⅱ)□ODEF : $\frac{7}{2}((6+\frac{b}{a}) + (6 - \frac{7-b}{a})) = 21$

$\Rightarrow$ $6a + 2b - 7 = 0$

ⅰ)과 ⅱ)를 연립하면

$a = 3, b = -\frac{11}{2}$ $\therefore$ $a + b = 3 - \frac{11}{2} = -\frac{5}{2}$