

1. 세 직선 $x + 2y = 5$, $2x - 3y = 4$, $ax + y = 0$ 이 삼각형을 이루지 못할 때, 상수 a 의 값들의 곱은?

- ① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{3}{23}$ ③ $-\frac{1}{23}$ ④ $\frac{2}{23}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

해설

주어진 세 직선이 일치하는 경우는 없으므로 삼각형을 이루지 못하는 것은 두 직선이 서로 평행해서 교점이 두 개만 생기거나 세 직선이 모두 한 점에서 만나는 경우이다.

(i) 두 직선이 평행한 경우 세 직선의 기울기는

각각 $-\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $-a$ 이므로

$a = \frac{1}{2}$ 또는 $a = -\frac{2}{3}$ 이면 두 직선이 평행하다.

(ii) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

$x + 2y = 5$ 와 $2x - 3y = 4$ 의 교점은 $\left(\frac{23}{7}, \frac{6}{7}\right)$

이 점이 $ax + y = 0$ 위에 있으려면 $a = -\frac{6}{23}$

(i), (ii)에서 $a = \frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{6}{23}$

따라서 세 수의 곱은 $\frac{2}{23}$

2. 세 직선 $2x - y - 4 = 0$, $x - 2y - 2 = 0$, $y = ax + 2$ 가 오직 한 점에서 만날 때, 상수 a 의 값은?

① 2

② 1

③ 0

④ -1

⑤ -2

해설

세 직선이 한 점에서 만나려면 두 직선의 교점을 나머지 한 직선이 지나야 한다.

$$2x - y - 4 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$x - 2y - 2 = 0 \cdots \textcircled{2}$$

$$y = ax + 2 \cdots \textcircled{3} \text{이라 할 때,}$$

①, ②의 교점이 ③위에 있으면, 한 점에서 만나므로

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{를 연립하여 풀면 } x = 2, y = 0$$

두 직선의 교점 (2, 0) 이 직선 $y = ax + 2$ 를 지나면 한 점에서 만나므로

$$0 = 2a + 2, 2a = -2$$

$$\therefore a = -1$$

3. 직선 $2x+4y+1=0$ 에 평행하고, 두 직선 $x-2y+10=0$, $x+3y-5=0$ 의 교점을 지나는 직선을 $y=ax+b$ 라 할 때 $2a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

직선 $2x+4y+1=0$ 의 기울기는

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \text{ 에서 } -\frac{1}{2}$$

또, $x-2y+10=0$, $x+3y-5=0$ 을 연립하여 풀면

$$x = -4, y = 3$$

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x + 4)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x + 1 \text{ 이므로}$$

$$a = -\frac{1}{2}, b = 1$$

$$\therefore 2a + b = 0$$

4. 세 직선 $x+y-1=0$, $x+ay+3=0$, $x-y-3=0$ 이 한 점에서 만날 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

두 직선 $x+y-1=0$, $x-y-3=0$ 의 교점을 구하면 $(2, -1)$ 이고,
이 점을 직선 $x+ay+3=0$ 이 지나면 되므로 $2+a \cdot (-1)+3=0$
 $\therefore a=5$

5. 세 직선 $2x+3y-4=0$, $3x-y+5=0$, $5x+2y+k=0$ 이 한 점에서 만나도록 상수 k 의 값을 정하면?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

세 직선이 한 점에서 만나려면

직선 $5x+2y+k=0$ 이 두 직선

$2x+3y-4=0$, $3x-y+5=0$ 의 교점을 지나야 한다.

두 직선 $2x+3y-4=0$, $3x-y+5=0$ 의 교점이 $(-1, 2)$ 이므로

$x=-1$, $y=2$ 를 $5x+2y+k=0$ 에 대입하면

$$5 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + k = 0$$

$$\therefore k = 1$$

6. 직선 $x+ay-1=0$ 과 x 축, y 축의 양의 부분으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 $\frac{1}{4}$ 일 때, a 의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

해설

$y = -\frac{1}{a}x + \frac{1}{a}$ 의 x 절편은 $(1, 0)$ y 절편은 $(0, \frac{1}{a})$ 이다.

$\therefore$ 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{a} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = 2$

7. 직선 $3x + ay = 3a$ ($a > 0$) 의 그래프가 x 축, y 축과 만나서 이루어진 삼각형의 넓이가 3 일 때, a 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

주어진 식의 양변을 $3a$ 로 나누면 $\frac{x}{a} + \frac{y}{3} = 1$

$\therefore x$ 절편이 a , y 절편이 3 이므로

$$S = \frac{1}{2} \times a \times 3 = 3$$

$$\therefore a = 2$$

8. 두 점 $(-1, 2), (3, 4)$ 를 지나는 직선이 x 축, y 축과 각각 점 A, B 에서 만날 때, 삼각형 OAB 의 넓이는? (단 O 는 원점)

- ① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{25}{4}$ ④ $\frac{24}{5}$ ⑤ $\frac{37}{6}$

해설

두 점 $(-1, 2), (3, 4)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $y - 4 = \frac{4 - 2}{3 - (-1)}(x - 3)$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

$y = 0$ 을 대입하면

$$0 = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}, x = -5$$

따라서 x 축과 만나는 점 A 의 좌표는 $A(-5, 0)$

㉠의 y 절편이 $\frac{5}{2}$ 이므로

y 축과 만나는 점 B 의 좌표는 $B(0, \frac{5}{2})$,

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{4}$$

9. 두 점 A(2, 1), B(-1, 3)을 연결한 선분 AB와 직선 $l: y = k(x+2)+2$ 가 공유점을 가질 k 의 범위는 $\alpha \leq k \leq \beta$ 이다. 이 때, $\alpha + \beta$ 의 값은?

- ① $\frac{3}{4}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$y = k(x+2) + 2$, $k(x+2) + 2 - y = 0$ 은
 k 에 관계없이 $x+2=0$, $2-y=0$ 의 교점
 즉, $(-2, 2)$ 를 지난다.

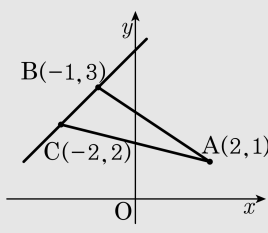
이 점을 C라 하면 선분 AB와 직선 l
 이

만나려면 그림에서 l 의 기울기 k 가
 l_2 의 기울기보다 작거나 같아야하고,
 l_3 의 기울기보다 크거나 같아야한다.

$$\beta = (l_2 \text{의 기울기}) = \frac{2-3}{-2-(-1)} = 1$$

$$\alpha = (l_3 \text{의 기울기}) = \frac{2-1}{-2-2} = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore \alpha + \beta = 1 + \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$$



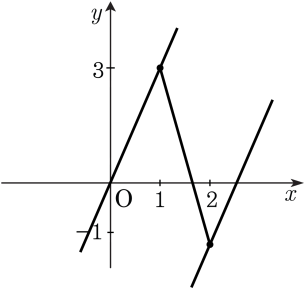
10. 직선 $3x - y + k = 0$ 이 두 점 $(1, 3)$, $(2, -1)$ 을 잇는 선분과 만나도록 k 값의 범위를 정하면?
- ① $-6 \leq k \leq 0$ ② $-7 \leq k \leq 0$ ③ $-6 \leq k \leq 1$
④ $-7 \leq k \leq 1$ ⑤ $-5 \leq k \leq 1$

해설

다음 그림에서와 같이 $y = 3x + k$ 가 조건을 만족하기 위해서는

i) $(1, 3)$ 에서 만날 때, $3 = 3 + k$
 $\therefore k = 0$

ii) $(2, -1)$ 에서 만날 때, $-1 = 6 + k$
 $\therefore k = -7$
 $\therefore -7 \leq k \leq 0$



11. 다음은 두 직선 $x + y - 2 = 0, mx - y + m + 1 = 0$ 이 제 1사분면에서 만나도록 하는 상수 m 의 값의 범위를 정하는 과정이다. 위의 안에 들어갈 것으로 옳지 않은 것은?

증명

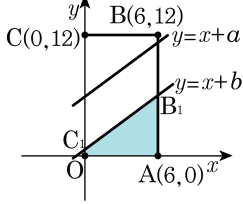
$x + y - 2 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $mx - y + m + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉡}$ 을 m 에 대하여 정리하면
 $(x + 1)m - (\textcircled{\hspace{1cm}} \textcircled{㉠}) = 0$ 에서 이 직선은 m 의 값에 관계없이 정점 $\textcircled{\hspace{1cm}} \textcircled{㉡}$ 을 지난다.
(i) $\textcircled{㉡}$ 이 점 $(0, 2)$ 를 지난다 때, $m = \textcircled{\hspace{1cm}} \textcircled{㉢}$
(ii) $\textcircled{㉡}$ 이 점 $(2, 0)$ 를 지난다 때, $m = \textcircled{\hspace{1cm}} \textcircled{㉣}$
따라서, 두 직선이 제 1사분면에서 만나려면 (i), (ii)에서 $\textcircled{\hspace{1cm}} \textcircled{㉤}$

- ① $y - 1$
- ② $(-1, 1)$
- ③ 1
- ④ $-\frac{1}{3}$
- ⑤ $-\frac{1}{3} \leq m \leq 1$

해설

$x + y - 2 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $mx - y + m + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉡}$ 을 m 에 대하여 정리하면
 $(x + 1)m - (\textcircled{\hspace{1cm}} y - 1) = 0$ 에서 이 직선은 m 의 값에 관계없이 정점 $\textcircled{\hspace{1cm}} (-1, 1)$ 을 지난다.
따라서 두 직선이 제 1사분면에서 만나려면
(i) $\textcircled{㉡}$ 이 점 $(0, 2)$ 를 지난다 때, $m = \textcircled{\hspace{1cm}} 1$
(ii) $\textcircled{㉡}$ 이 점 $(2, 0)$ 를 지난다 때, $m = \textcircled{\hspace{1cm}} -\frac{1}{3}$
(i), (ii)에서 $\textcircled{\hspace{1cm}} -\frac{1}{3} < m < 1$

12. 네 점 $O(0,0)$, $A(6,0)$, $B(6,12)$, $C(0,12)$ 를 꼭지점으로 하는 사각형 $OABC$ 가 있다. 그림과 같이 두 직선 $y = x + a$, $y = x + b$ 가 사각형 $OABC$ 의 넓이를 삼등분할 때, ab 의 값은?



- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

사각형 $OABC$ 의 넓이가 72이므로
사각형 OAB_1C_1 의 넓이는 24이다.
 $\frac{1}{2}(b + 6 + b) \times 6 = 24$ 이므로 $b = 1$
같은 방법으로 $a = 5$
 $\therefore ab = 5$

13. 좌표평면 위에 세 점 $A(-2, 1)$, $B(4, 7)$, $C(6, 3)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 가 있다. 직선 $y = mx + 2m + 1$ 에 의하여 $\triangle ABC$ 의 넓이가 이등분될 때, m 의 값은?

- ① $\frac{2}{7}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{4}{7}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

해설

직선 $y = m(x + 2) + 1$ 은 m 의 값에 관계없이
항상 점 $(-2, 1)$ 을 지나므로 점 A 를 지난다.
따라서 주어진 직선이 $\triangle ABC$ 의 넓이를 이등분하려면
직선이 $\overline{BC}$ 의 중점 $M(5, 5)$ 를 지나야 한다.
 $\therefore 5 = m(5 + 2) + 1$
 $\therefore m = \frac{4}{7}$

14. $O(0,0)$, $A(4,4)$, $B(8,-6)$ 에서 원점을 지나고 $\triangle OAB$ 의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식은?

① $y = -\frac{1}{6}x$

② $y = -\frac{1}{5}x$

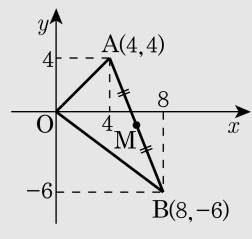
③ $y = -\frac{1}{4}x$

④ $y = -\frac{1}{3}x$

⑤ $y = -\frac{1}{2}x$

해설

구하고자 하는 직선은 원점과 $\overline{AB}$ 의 중점 $M(6, -1)$ 을 지나므로



$$y - 0 = \frac{-1 - 0}{6 - 0}(x - 0)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{6}x$$